รายงานผลการวิจัย ทุนวิจัยของทบวงมหาวิทยาลัย

เรื่อง

การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม โดยใช้และไม่ใช้คาสเซตเทปประกอบการสอน แก่นักศึกษาชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยกรุงเทพ

A Comparative Study of the Result of the Teaching of Sequences and Series in Mathematics by the Use and Disuse of Cassette Tapes in Teaching for First Year Students at BANGKOK UNIVERSITY.

โดย

วัฒนา สุนทรธัย

ชื่อโครงการวิจัย : การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรม โดยใช้และไม่ใช้คาสเซตเทปประกอบการสอน แก่นักศึกษาชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยกรุงเทพ

ชื่อผู้วิจัย : วัฒนา สุนทรธัย

เดือนและปีที่ทำการวิจัย : มิถุนายน 2529 – พฤษภาคม 2530

บทคัดย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ เรื่องลำดับและอนุกรม ระหว่างผลการสอนสามแบบคือ แบบเก่า แบบบรรยายตามคู่มือ และแบบใช้คาสเซตเทปบรรยายตามคู่มือ แก่นักศึกษากลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน โดยแบ่งตามเพศเพื่อสร้างบทเรียนและคาสเซตเทปประกอบการสอน และเพื่อให้นักศึกษาที่เรียนไม่เข้าใจในห้องเรียน สามารถนำบทเรียนและคาสเซต-เทปไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนได้

วิธีดำเนินการวิจัย

สุ่มนักศึกษาชั้นปีที่ 1 คณะบริหารธุรกิจ มหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปีการศึกษา 2529 จำนวน 243 คน แล้วแบ่งผู้เรียนออกเป็นสามกลุ่ม ๆ แรกสอนแบบเก่า กลุ่มที่สองสอนโดยผู้สอนบรรยายตามคู่มือ และกลุ่มที่สามสอนโดยใช้คาสเซตเทปบรรยายตามคู่มือ ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 6 คาบ โดยผู้สอนคนเดียวกัน เมื่อสอนจบแล้ว 2 – 3 วัน ก็ให้ผู้เรียนทำข้อสอบ เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้

ผลการวิจัย

สรุปได้ว่า ผลการสอนทั้งสามวิธีมิได้ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้แตกต่างกัน ไม่ว่าจะเป็นนักศึกษากลุ่ม (หรือระดับ) ใด เพศใด

Research Project Title : A comparative Study of the Result of the Teaching of Sequences and Series in Mathematics by the Use and Disuse of Cassette Tapes in Teaching First Year Students at Bangkok University.

Person doing the research : Mr. Vathana Soonthorndhai

Period of Research : June 1986 - May 1987

Abstract

The Purpose of the Study : To compare first year students' achievement on Sequences and Series in Mathematics through Three different teaching methods, namely: traditional method, lecture - based - on -selected - textbooks method: and the use of cassette tape method.

Procedures : Two hundred and forty-three first year students were selected from the Faculty of Business Administration. They were divided into three equal groups. Each group has a mixture of levels of intelligence. They were of both sexes. The traditional method was used for the first group: the lecture method to the second: and the cassette tape method to the third. Each of the three group was taught for six periods by the same teacher. An assessment of the students' achievement was then made.

Finding : There is no stastically significant difference in the performance of the three groups of students regardless of their level of intelligence or their sex.

กิติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ ทบวงมหาวิทยาลัยเป็นอย่างมาก ที่ได้ให้ทุนอุดหนุนการวิจัยนี้ เพื่อพัฒนาสถาบันอุดมศึกษาเอกชน

นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์สุชาดา สุภัททธรรม ที่ช่วยบรรยายลงคาสเซตเทป ขอขอบคุณ อาจารย์พันธมิตร คุณศรีรักษ์สกุล อาจารย์ณรงศักดิ์ ศรีธานันท์ ที่อำนวยความสะดวกในการอัดเสียง ขอขอบคุณ อาจารย์นุจรี เอี่ยมสำราญ ที่ทำหน้าที่เป็นผู้สอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณนักศึกษาทุกกลุ่ม ตลอดจนอาจารย์และเจ้าหน้าที่ทุกท่าน ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการวิจัย จนทำให้การวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยความเรียบร้อย

วัฒนา สุนทรธัย

สารบัญ

รายการตารางประกอบ

บทที่ 1

บทนำ

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญอย่างยิ่ง ที่จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการทำงานในอนาคตได้ แต่มีนักศึกษาจำนวนมากที่ไม่ค่อยชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งนี้คงจะไม่ใช่ว่าเพราะว่านักศึกษาไม่เห็นความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ แต่อาจจะเป็นเพราะว่านักศึกษาเหล่านั้นมีทัศนคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มาก่อน ทั้งนี้อาจจะเนื่องมาจากความไม่ประทับใจในวิธีการสอนของผู้สอนในอดีต เมื่อเรียนไม่เข้าใจตั้งแต่ครั้งเริ่มเรียนใหม่ ๆ จึงเกิดการสะสมความเบื่อหน่าย และความท้อแท้มาเรื่อย ๆ จนมีความรู้สึกที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ในที่สุด

จากประสบการณ์ที่ผู้วิจัยเคยสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัยติดต่อกันมาเป็นเวลาสิบกว่าปี ทำให้ทราบว่าพื้นฐานของนักศึกษาในชั้นปีที่ 1 มีความแตกต่างกันมาก มีตั้งแต่ผู้ที่ชอบวิชาคณิตศาสตร์มาก ชอบปานกลาง ชอบน้อย และไม่ชอบเลย โดยเฉพาะแบบหลัง ๆ จะมีมากกว่าแบบแรก ๆ และการที่จะเปลี่ยนทัศนคติของนักศึกษาที่ไม่ค่อยชอบวิชาคณิตศาสตร์ให้รู้สึกชอบขึ้นมานั้นไม่ใช่เรื่องที่จะทำได้ง่าย ผู้เรียนจะชอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ก็ต่อเมื่อเขาเรียนแล้วมีความเข้าใจตลอด และการที่จะสอนให้นักศึกษาที่ไม่ค่อยชอบวิชาคณิตศาสตร์ให้เข้าใจให้ตลอดได้นั้น ก็หมายถึงว่า ผู้สอนจะต้องทบทวนพื้นฐานต่าง ๆ ที่ผู้เรียนเคยเรียนมาตั้งแต่ชั้นประถมและมัธยมที่เคยเข้าใจผิดหรือเคยไม่เข้าใจมาก่อน การที่จะสร้างความพร้อมเช่นนั้นได้ก็คงจะต้องใช้เวลามาก ซึ่งก็เป็นไปไม่ได้เพราะเวลาเรียนมีจำกัด ในทางปฏิบัติจึงไม่สามารถสร้างความพร้อมเช่นที่ว่านี้ได้ พื้นฐานที่แตกต่างกันของแต่ละคนจึงยังคงมีอยู่ ทำให้ผู้สอนประสบปัญหาในการสอน กล่าวคือถ้าเร่งสอนเพื่อให้ทันกับหลักสูตร นักศึกษาที่เรียนอ่อนก็ตามไม่ทัน ถ้าสอนช้า ๆ เพื่อให้นักศึกษาที่เรียนอ่อนตามได้ทันหมดทุกคน นักศึกษาที่อยู่ในระดับเรียนเก่งก็เบื่อที่จะทนฟังเรื่องง่าย ๆ ผู้สอนจึงพยายามเอาใจทั้งสองฝ่าย แม้กระนั้นก็ตาม ปัญหาการเรียนไม่ทันของนักศึกษากลุ่มอ่อนก็ยังคงมีอยู่ ทั้งนี้เพราะเวลาเรียนมีจำกัด ทางแก้ที่เป็นไปได้อย่างหนึ่งก็คือ แยกนักศึกษาที่เรียนเก่งและอ่อนให้อยู่คนละกลุ่ม แล้วสอนตามความถนัดของแต่ละกลุ่ม แต่ถ้าพิจารณาข้อดีและข้อเสียอื่น ๆ ประกอบแล้วการแบ่งแยกอย่างนี้จะมีผลเสียอย่างอื่นตามมาอีกหลายอย่าง จึงไม่สามารถนำมาใช้ได้

ทฤษฎีหนึ่งในทางจิตวิทยา (WITTIG, 1984) กล่าวว่า การเรียนรู้เป็นฟังค์ชั่นของเวลา หมายถึงว่า คนปกติโดยทั่วไปสามารถเรียนรู้เรื่องเดียวกันทันกันได้ เพียงแต่ให้เวลาเขาเพียงพอ คนเก่งอาจจะฟังคำบรรยายเพียงรอบเดียวก็สามารถทำแบบฝึกหัดหรือข้อสอบได้ ในขณะที่คนอ่อนอาจจะใช้เวลาศึกษาและทบทวนมากกว่าคนเก่งหลายชั่วโมง หรือหลายวันจึงจะสามารถเรียนทันกันได้ จากความเชื่ออันนี้ เมื่อนำมาปฏิบัติในห้องเรียน ทางที่เป็นไปได้อย่างหนึ่งก็คือ ผู้สอนจะต้องตามติวเป็นรายบุคคล และคงจะต้องใช้เวลามากกว่าจะติวกันได้ทั่วถึง หรือมิฉะนั้นก็คงจะต้องใช้ผู้ติว (TUTOR) หลายคนในการติวนักศึกษาในแต่ละกลุ่ม จึงจะทำให้ทุกคนเข้าใจทันกันในเวลาจำกัด ในทางปฏิบัติจึงไม่สามารถทำได้

จากปัญหาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยมีความเชื่อว่า ถ้าหากมีการสร้างบทเรียนที่เหมาะสมโดยทบทวนพื้นฐานที่จำเป็น ๆ และลำดับการเรียนรู้จากง่ายไปยาก แล้วทำเป็น "เอกสารคำสอน" พร้อมด้วยอัดเสียงคำบรรยายประกอบ อาจจะทำให้นักศึกษาที่ตามไม่ทันในห้องเรียน สามารถนำไปศึกษาเพิ่มเติม เพื่อให้เรียนได้ทันคนอื่นได้

เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" เป็นบทหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ ซึ่งเป็นหลักสูตรที่ใช้สอนในมหาวิทยาลัยกรุงเทพในปัจจุบันนี้ (และเป็นหัวข้อที่นักศึกษาระดับชั้นปีที่ 1 เกือบทุกมหาวิทยาลัยจะต้องเรียน) เป็นหัวข้อที่ผู้เรียนเรียนแล้วทำความเข้าใจได้ยากที่สุด โดยสังเกตจากคะแนนทดสอบที่ทดสอบแต่ละบท คะแนนเฉลี่ยในการทดสอบหัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" จะน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับหัวข้ออื่น ๆ ในวิชาเดียวกันนี้ ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจเลือกหัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" มาทำการวิจัยเพื่อทดสอบความเชื่อดังกล่าว

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ระหว่างผลการสอนสามแบบคือ

แบบที่ 1 สอนแบบเก่าหรือแบบธรรมดาที่สอนโดยทั่ว ๆ ไป (โดยไม่ใช้คาสเซตเทป)
แบบที่ 2 สอนโดยผู้สอนบรรยายตามคู่มือ (ไม่ใช้คาสเซตเทป)
แบบที่ 3 สอนโดยเปิดคาสเซตเทปที่บรรยายตามคู่มือและผู้สอนอธิบายประกอบ

2. เพื่อสร้างบทเรียนและคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนเรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปี พ.ศ.2523

3. เพื่อช่วยให้ผู้ที่เรียนไม่เข้าใจในห้องเรียนเรื่อง "ลำดับและอนุกรม" สามารถนำคู่มือและคาสเซตเทปไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนได้

สมมุติฐานของการวิจัย

1. นักศึกษากลุ่มอ่อน เมื่อใช้คู่มือหรือคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนแล้ว จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้สูงกว่ากลุ่มอ่อนที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบเก่า (ไม่ใช้คู่มือหรือคาสเซตเทปประกอบการสอน)

2. นักศึกษากลุ่มปานกลางและกลุ่มเก่ง ไม่ว่าจะสอนโดยวิธีใดก็ตาม จะไม่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้แตกต่างกัน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. จะทำให้มีคู่มือและคาสเซตเทปเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในหัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" เพื่อให้นักศึกษาที่ตามไม่ทันในห้องเรียนสามารถยืมไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนได้

2. เป็นการเสริมสร้างแนวความคิดในการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาใช้ประกอบการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. ใช้บทเรียนวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ หัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" ตามหลักสูตรมหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปี 2523

2. หน่วยตัวอย่างที่ศึกษา คือนักศึกษาที่กำลังเรียนอยู่ในชั้นปีที่ 1 คณะบริหารธุรกิจ มหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปีการศึกษา 2529 จำนวน 243 คน โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็นสามกลุ่ม สองกลุ่มแรกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มหลังเป็นกลุ่มควบคุม

3. ทำการทดลองในภาคเรียนที่ 2/2529 ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 6 คาบ ๆ ละ 1.10 ชั่วโมง เมื่อสอนจบแล้วก็ทำการทดสอบ โดยใช้เวลา 1 ชั่วโมง แบบทดสอบ 20 ข้อ เป็นชนิดเลือกตอบแบบห้าตัวเลือก

ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับบทเรียนที่ใช้ในการวิจัย

บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้น พยายามใช้สัญลักษณ์และภาษาอย่างง่าย ๆ โดยพยายามหลีกเลี่ยงนิยาม ทฤษฎี หรือการพิสูจน์สูตรต่าง ๆ ทั้งนี้เพื่อมิให้เป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้ของนักศึกษากลุ่มอ่อน เพราะนักศึกษากลุ่มนี้ เมื่อพบสัญลักษณ์หรือคำพูดที่ไม่คุ้นเคย จะทำความเข้าใจได้ลำบาก ซึ่งจะก่อให้เกิดความท้อแท้ในการเรียน ตัวอย่างเช่น ในบททบทวนพื้นฐานที่สำคัญ ๆ ก่อนที่จะขึ้นบทเรียน การกล่าวถึง "$\lim_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$" อาจจะเข้าใจยากสำหรับนักศึกษากลุ่มอ่อน แต่ถ้าเขียนเป็น "$\frac{5}{0} = \infty$" นักศึกษาที่เรียนอ่อนเหล่านั้นจะเข้าใจได้เร็วกว่า (โดยนิยามแล้วไม่ควรเขียนแบบหลัง) แต่ผู้สอนจะกล่าวทุกครั้งว่า ที่ถูกต้องควรจะเขียนแบบใด เพื่อไม่ให้นักศึกษากลุ่มอื่นเกิดความเข้าใจผิด

การนิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการวิจัย

1. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยกรุงเทพ ที่เรียนในภาคที่ 2/2529

นักศึกษากลุ่มทดลอง หมายถึงนักศึกษาที่ใช้คู่มือ (หรือ "เอกสารคำสอน") และฟังคำบรรยายประกอบการเรียนการสอน หรือหมายถึงนักศึกษาที่ใช้คู่มือ (หรือ "เอกสารคำสอน") ฟังคำบรรยาย และใช้คาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอน

นักศึกษากลุ่มควบคุม หมายถึงนักศึกษาที่เรียนโดยวิธีการสอนปกติ (วิธีเก่า)

แบ่งนักศึกษาออกเป็นสามกลุ่ม คือ กลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน โดยอาศัยคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นพื้นฐาน (Fundamentals of Mathematics) ที่นักศึกษาเคยเรียนในภาคที่ 1/2529 มาแบ่งระดับความสามารถของนักศึกษา และใช้เทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบแบบ 27% เป็นกลุ่มสูง และกลุ่มต่ำ (EBEL, 1965) เป็นเกณฑ์ในการแบ่งดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงการแบ่งระดับความสามารถของนักศึกษา

ระดับความสามารถ	ระดับ Percentile
กลุ่มเก่ง	73 - 99
กลุ่มปานกลาง	27 - 72
กลุ่มอ่อน	0 - 26

2. คู่มือ หมายถึง เอกสารคำสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งประกอบด้วยบททบทวนพื้นฐานที่จำเป็น ๆ สำหรับใช้ในบทเรียน เรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยาก และมีแบบฝึกหัดให้ทำเป็นตอน ๆ ตามความเหมาะสม

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบผลการเรียนในหัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" หลังจากสิ้นสุดการสอน โดยใช้ข้อสอบจากธนาคารข้อสอบของแผนกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยกรุงเทพ

4. คาสเซตเทป หมายถึง เทปคาสเซตซึ่งบรรยายตามคู่มือโดยใช้เสียงชายและหญิงสลับกัน

ตัวแปรศึกษา

<u>ตัวแปรอิสระ</u> (Independent Variables) มี 3 ตัว คือ

1. รูปแบบการสอน ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธีคือ
    - 1.1 สอนแบบปกติหรือแบบเก่า
    - 1.2 สอนโดยใช้คู่มือ และอธิบายประกอบคู่มือ
    - 1.3 สอนโดยใช้คู่มือ คาสเซตเทป และอธิบายประกอบ

2. ระดับสติปัญญาของนักศึกษา ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ระดับ คือ
    2.1 ระดับเรียนเก่ง (หรือกลุ่มเก่ง)
    2.2 ระดับเรียนปานกลาง (หรือกลุ่มปานกลาง)
    2.3 ระดับเรียนอ่อน (หรือกลุ่มอ่อน)
3. เพศ แบ่งออกเป็น
    3.1 เพศชาย
    3.2 เพศหญิง

ตัวแปรตาม (Dependent Variable)

ใช้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นตัวแปรตาม

บทที่ 2

เอกสารและรายงานการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยยังไม่พบว่าได้มีการทำการวิจัยเปรียบเทียบเกี่ยวกับการใช้คาสเซตเทป และไม่ใช้คาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนที่ใดมาก่อน ที่พบส่วนมากมักจะเป็นการวิจัยที่เกี่ยวกับการใช้สไลด์เทป การใช้ฟิล์มสตริป การใช้วิทยุ การใช้สมุดภาพ การใช้หุ่นจำลอง การใช้เทปโทรทัศน์ หรือการใช้ภาพยนต์ โดยเฉพาะการใช้สไลด์เทปได้มีการวิจัยมากที่สุด

ความจริงแล้ว ได้มีการใช้คาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนมากพอสมควรแล้ว เช่น ในมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช และในสถาบันของเอกชนหลายแห่ง เพียงแต่มิได้มีการวิจัยอย่างเป็นหลักฐานว่าได้ผลมากน้อยเพียงใดเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม เพื่อแสดงให้เห็นถึงการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาใช้ประกอบการเรียนการสอน ผู้วิจัยจึงขอเสนอผลการวิจัยที่เกี่ยวกับการใช้สไลด์เทปมาประกอบการเรียนการสอน ทั้งนี้เพราะการใช้สไลด์เทปและคาสเซตเทปมีความคล้ายคลึงกันในแง่ที่ว่า สไลด์เทปเป็นการดูภาพและมีเสียงประกอบ ส่วนคาสเซตเทปเป็นการดูหนังสือ (หรือสัญลักษณ์) และฟังเสียงบรรยายประกอบ ผลที่ได้จึงไม่น่าจะแตกต่างกันมากนัก

การใช้สไลด์เทปเป็นสื่อที่ให้ทั้งการเห็นและการฟัง ใช้ได้ทั้งการเรียนในกลุ่มใหญ่ กลุ่มย่อย และการเรียนแบบรายบุคคล (Wittich and Schuller, 1957) ซึ่งสามารถหาความรู้ได้ด้วยตนเองและวิททิช ได้กล่าวถึงประโยชน์และคุณค่าของสไลด์โดยทั่วไปว่า สไลด์เป็นภาพนิ่งซึ่งเป็นสื่อที่มีคุณภาพในการสอน จะแยกฉายหรือเรียงลำดับภาพใหม่ก็ได้ เป็นที่รวมจุดสนใจ สามารถผลิตได้ทั้งสีและ ขาว – ดำ ผลิตได้ง่ายกว่าฟิล์มสตริปและภาพยนต์ สะดวกในการฉาย (ไม่ต้องฉายในห้องที่มืดนัก) ราคาก็ไม่แพงจนเกินไปนัก และใช้สอนได้กว้างขวางทุกแขนงวิชา (เช่นเดียวกันกับคาสเซตเทป)

ผลการวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์ภายในประเทศ

จริยา สระตันติ์ (2513) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนอ่านคำภาษาไทยโดยใช้สไลด์เป็นอุปกรณ์การสอนกับการสอนอ่านตามปกติ ของนักเรียนที่จบชั้นประถมปีที่ 1 ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่ทางด้านความคงทนในการจำ ปรากฏว่ากลุ่มที่ครูสอนโดยใช้สไลด์เป็นอุปกรณ์มีความสามารถในการจำบทเรียนที่เรียนไปแล้วได้ดีกว่าการสอนอีกวิธี

เฉลิม คิดชัย (2515) ได้ศึกษาการสอนวิชาอุตสาหกรรมศิลป์เป็นรายบุคคลโดยใช้สไลด์เทปเสียงกับการเรียนแบบบรรยายในชั้นเรียนตามปกติ โดยสอนวิชาไฟฟ้ากับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าผลการสอนวิชานี้ เป็นรายบุคคลโดยใช้สไลด์เทปเสียงกับการสอนแบบบรรยายในชั้นเรียนตามปกติไม่แตกต่างกัน แต่สไลด์เทปเสียงช่วยให้ผู้เรียนจดจำเนื้อหาในบทเรียนได้ดีกว่าการสอนแบบบรรยาย

ประภา ภูวธน (2515) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ข้อความจริงในวิชาวิทยาศาสตร์ โดยใช้รูปภาพกับสไลด์เทปประกอบการสอน ปรากฏว่าได้ผลทัดเทียมกัน และเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มที่สอนแบบบรรยายโดยไม่มีอุปกรณ์ ประกอบกับกลุ่มที่ใช้สไลด์ประกอบ ผลของกลุ่มที่ใช้สไลด์ประกอบดีกว่า

สมคิด เมตไตรพันธ์ (2517) ทำการเปรียบเทียบการสอนวิชาถ่ายรูปเป็นรายบุคคล โดยใช้สไลด์เทปเสียงกับการสอนแบบบรรยายเป็นกลุ่มในชั้นเรียน ใช้กลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 2 จำนวน 60 คน ปรากฏว่าการสอนโดยใช้สไลด์เทปเสียงกับการสอนแบบบรรยายเป็นกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่สไลด์เทปเสียงช่วยให้ผู้เรียนจำเนื้อหาในบทเรียนได้ดีกว่าการสอนแบบบรรยาย

พฤฒิพงษ์ เล็กศิริรัตน์ (2519) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียนจากสไลด์เทป สมุดภาพแบบโปรแกรม และจากการสอนปกติ พบว่าการเรียนจากการสอนตามปกติ จากสไลด์เทปเสียง

และจากสมุดภาพโปรแกรม ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ไม่แตกต่างกัน

ปราโมทย์ เทพพัลลภ (2521) ได้ศึกษาผลการเรียนที่เกิดจากการเรียนด้วยตนเอง จากเทปโทรทัศน์ จากสไลด์เทป และจากการเรียนการสอนตามปกติ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างจากนักเรียนชั้น ม.ศ. 3 ในวิชาพื้นฐานเกี่ยวกับอิเล็คโทรนิคส์ พบว่าการเรียนรู้ทั้ง 3 วิธีดังกล่าวมาแล้วนั้นไม่แตกต่างกัน

ผลการวิจัยของนักวิจัยไทยที่นำมาศึกษา 6 ราย ผลปรากฏว่าส่วนใหญ่แล้ว มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน มีอยู่ 1 ราย ที่การใช้สไลด์ให้ผลดีกว่า ส่วนความคงทนในจำนั้น ส่วนใหญ่แล้วการใช้สไลด์จะให้ผลดีกว่า

ผลการวิจัยเกี่ยวกับการใช้สไลด์จากต่างประเทศ

ซีฟ (Zyve, 1932) ได้เปรียบเทียบการสอนเลขคณิต เรื่องเศษส่วน โดยใช้สไลด์กับการสอนโดยใช้กระดานดำ พบว่า การสอนโดยใช้กระดานดำ ใช้เวลา 3 วัน จะได้ผลเท่ากับการสอนโดยใช้สไลด์ในเวลาเพียง 2 วัน

อเบรมสัน (Abramson, 1952) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนแบบมาตรฐานที่ใช้กันอยู่กับการสอนโดยใช้สไลด์เทป ในวิชากลศาสตร์เบื้องต้น แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้สไลด์เทปมีผลการเรียนดีกว่าทั้งในระยะทันทีที่จบ และหลังจากที่เรียนไปแล้วนาน 2 เดือน

คราวเดอร์ (Crowder, 1969) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิชาอุตสาหกรรมศิลป์โดยใช้สไลด์ประกอบหุ่นจำลอง กับการสอนโดยวิธีธรรมดา ปรากฏว่าการสอนโดยใช้สไลด์ประกอบหุ่นจำลองให้ผลในด้านการเรียนรู้ได้ดีกว่าการสอนแบบบรรยาย และเหมาะสมที่จะนำมาใช้สอนเด็กที่มีสติปัญญาสูงและต่ำ

แมคไกว์ (Mc Guire, 1971) ได้ทดลองใช้สไลด์เทปฝึกการเขียนชวเลขกับนักเรียน 135 คน ปรากฏว่า ผู้ที่เรียนชวเลขจากสไลด์เทปสามารถเขียนได้รวดเร็ว และถูกต้องกว่าการสอนปกติ

ลอรี่ (Laurie, 1975) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนแบบบรรยายกับการสอนโดยใช้สไลด์ประกอบเทป เรื่อง สภาพความสมบูรณ์ของร่างกาย ผลปรากฏว่า การสอนทั้งสองวิธีเป็นการสอนที่นับว่ามีผลที่ดี มีประสิทธิภาพและได้ผลทัดเทียมกัน

วอง (Wong, 1976) ทดลองใช้สไลด์เทปประกอบคำบรรยายแนะนำนักศึกษาในเรื่องศูนย์วัสดุการเรียน เปรียบเทียบกับการแนะนำโดยใช้การบรรยาย พบว่า ผลการทดลองไม่แตกต่างกัน

ผลการวิจัยของนักวิจัยจากต่างประเทศที่นำมาศึกษา 6 ราย ปรากฏผลว่ามีอยู่ 4 ราย ที่การใช้สไลด์ได้ผลดีกว่า ส่วนที่เหลืออีก 2 ราย ให้ผลไม่แตกต่างกัน

จากการเปรียบเทียบผลการวิจัยของไทย 6 ราย และของต่างประเทศ 6 ราย ไม่ปรากฏว่ามีรายใดที่การใช้สไลด์ประกอบการเรียนการสอนแล้ว ได้ผลด้อยกว่าการสอนแบบธรรมดา ทำให้ผู้วิจัยมีความเชื่อมั่นว่าผลการศึกษาเปรียบเทียบระหว่างการใช้คาสเซตเทปและไม่ใช้คาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอน น่าจะให้ผลในทำนองเดียวกันกับการใช้สไลด์และไม่ใช้สไลด์ประกอบการเรียนการสอน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การสร้างบทเรียนและอัดเทป

ดำเนินเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. การสอนกลุ่มพิเศษและทดสอบพื้นฐาน

ก่อนที่จะเริ่มโครงการนี้ ผู้วิจัยได้ไปสอนกลุ่มพิเศษ (เป็นนักศึกษาที่อ่อนคณิตศาสตร์ และรวมตัวกันเพื่อหาอาจารย์มาติวนอกเวลาเรียน) ในหัวข้อ "ลำดับและอนุกรม" เพื่อต้องการทราบพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียนในหัวข้อดังกล่าว และเพื่อต้องการทราบว่านักศึกษาที่อ่อนคณิตศาสตร์มีวิธีการทำความเข้าใจในเรื่องดังกล่าวอย่างไร

หลังจากสอนจบแล้ว ผู้วิจัยได้รวบรวมพื้นฐานต่าง ๆ ที่นักศึกษามักจะเข้าใจผิด นำมาเรียบเรียงและจัดเป็นหมวดหมู่ แล้วนำไปทดสอบกลุ่มเดิมเพื่อนำมาเรียงลำดับตามความยากง่าย

2. สร้างบทเรียน (เอกสารคำสอน) และปรับปรุง

สร้างบทเรียนเรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ ปี 2523 มหาวิทยาลัยกรุงเทพ แล้วเลือกนักศึกษาภาคค่ำมา 1 คน ให้อ่านบทเรียนดังกล่าว เพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียน (เช่นข้อความคลุมเครือหรืออ่านไม่เข้าใจ) เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขให้สมบูรณ์ ก่อนที่จะนำไปสอนจริง

3. การอัดเทป

นำบทเรียนที่ได้ปรับปรุงแล้วนั้น ไปอัดลงคาสเซตเทปที่ห้องอัดเสียงของคณะนิเทศศาสตร์ มหาวิทยาลัยกรุงเทพ โดยใช้เสียงผู้ชายและผู้หญิงสลับกัน แบ่งบทเรียนออกเป็น 6 คาบ แต่ละคาบมีแบบฝึกหัดให้ทำเป็นช่วง ๆ

การสุ่มตัวอย่าง

นำคะแนนรวมวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (MA 101 : Fundamentals of Mathematics) ของนักศึกษาที่เรียนในภาคที่ 1/2529 มาหาค่าเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตราฐาน เพื่อแบ่งนักศึกษาออกเป็นสามระดับคือ ระดับเรียนเก่ง ปานกลาง และระดับเรียนอ่อน ผู้วิจัยได้คาดการณ์ล่วงหน้าว่านักศึกษากลุ่มอ่อนเมื่อถึงเวลากำหนดการเพิกถอน (Drop) วิชาเรียนแล้วจะเป็นกลุ่มที่จะมาเพิกถอนจำนวนมาก จึงสุ่มมามากกว่ากลุ่มอื่น ๆ และมีจำนวนดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงจำนวนตัวอย่างของนักศึกษาทั้งสามระดับ แบ่งตามกลุ่มและเพศ

เพศและระดับผู้เรียน	เพศชาย			เพศหญิง			
กลุ่ม	เก่ง	กลาง	อ่อน	เก่ง	กลาง	อ่อน	รวม
PLAN 7 A, B	10	11	16	10	10	24	81
PLAN 7 C, D	10	10	16	10	11	24	81
PLAN 10 A, B	10	10	16	11	10	24	81
รวม	30	31	48	31	31	72	243

การสอน

PLAN 7 A, B สอนโดยใช้คู่มือและบรรยายประกอบโดยคาสเซตเทป

PLAN 7 C, D สอนโดยใช้คู่มือและบรรยายประกอบโดยผู้สอน

PLAN 10 A, B สอนโดยวิธีปกติ

และใช้เวลาสอนกลุ่มละ 6 คาบ เท่ากันหมด

การทดสอบ

หลังจากที่สอนจบไปแล้วประมาณ 2 – 3 วัน (แต่ละกลุ่มสอนจบไม่พร้อมกัน) ก็ทำการทดสอบ โดยนำข้อสอบมาจากธนาคารข้อสอบของแผนกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยกรุงเทพ จำนวน 20 ข้อ เป็นแบบปรนัย ชนิด 5 ตัวเลือก ซึ่งมีความยากง่าย (P) ระหว่าง 0.20 – 0.80 และอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 เป็นต้นไป โดยใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

หลังจากทำการทดสอบแล้ว ผู้วิจัยได้ตรวจและให้คะแนนเพื่อคำนวณหาความเชื่อมั่น (r_{tt}) โดยใช้สูตรคูเดอร์ – ริชาร์ดสัน (Johnson, 1950) ดังนี้

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{1 - \frac{\Sigma P q}{S^2}\right\}$$

เมื่อ r_{tt} = ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N = จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบ

P = ระดับความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ

$$= \frac{\text{จำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$$

q = $1 - P$

S^2 = ความแปรปรวนของคะแนนทดสอบ

$$= \frac{n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{n(n-1)}$$

n = จำนวนของนักศึกษา

ΣX = ผลรวมของคะแนนแต่ละจำนวน

ΣX^2 = ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละจำนวน

2. การหาคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาแต่ละกลุ่ม (Guildford, 1965)

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

= คะแนนเฉลี่ย

เมื่อ ΣX = ผลรวมของคะแนนนักศึกษา

n = จำนวนของนักศึกษา

3. การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Bartee, 1968)

ในการทดลองครั้งนี้ เป็นการวิจัยเชิงทดลองมีรูปแบบเป็น Factorial Design ขนาด 3 × 2 × 3 ดังสมการ

$$Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + (A\,B)_{ij} + (A\,C)_{ik} + (B\,C)_{jk} + (A\,B\,C)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

i = 1, 2, 3

j = 1, 2

k = 1, 2, 3

l = 1, 2, 3, 4, 5

เมื่อ A คือ รูปแบบการสอน(Teaching Method)

B คือ เพศ (Sex)

C คือ ระดับของผู้เรียน (Learner Level)

μ คือ Population Mean

Y_{ijkl} คือ Experimental Unit ที่ได้รับจาก treatment ที่ ijk และซ้ำที่ l โดยใช้ตารางวิเคราะห์ ดังนี้

ตารางที่ 3 รูปแบบของตารางที่จะใช้ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสามทาง

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Sum of Squares	F - ratio
1 Factor Classification				
1				
2				
3				
2 Factor Interaction				
1 x 2				
2 x 3				
1 x 3				
3 Factor Interaction				
1 x 2 x 3				
Error				
Total				

โดย Factor 1 = A (Teaching Method)

Factor 2 = B (Sex)

Factor 3 = C (Learner Level)

4. การทดสอบพื้นฐานเดิม

เพื่อต้องการทราบพื้นฐานเดิมของกลุ่มทดลอง (และกลุ่มควบคุม) จึงได้นำคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (Fundamentals of Mathematics) ที่นักศึกษาในกลุ่มตัวอย่างเคยเรียนมาก่อน (เรียนในภาค 1/2529) มาหาค่าเฉลี่ยและวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย ดังในตารางที่ 4 และ 5 ตามลำดับต่อไปนี้

ตารางที่ 4 แสดงค่าเฉลี่ย (เต็ม 100) ของวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน แบ่งตามกลุ่ม เพศ และระดับความสามารถของนักศึกษา*

	ชาย			หญิง			
	เก่ง	กลาง	อ่อน	เก่ง	กลาง	อ่อน	เฉลี่ยรวม
PLAN 7 A + B	85.2	60.0	47.4	88.6	64.2	42.4	64.6
PLAN 7 C + D	89.2	61.2	46.4	87.8	63.2	42.6	65.1
PLAN 10 A + B	87.8	59.6	49.0	87.4	63.0	42.0	64.8
เฉลี่ยรวม	87.4	60.3	47.6	87.9	63.5	42.3	64.8
	65.1			64.6			

ตารางที่ 5 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (ทำก่อนการทดลองสอน)

---

*จำนวนของนักศึกษาที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ยเป็นไปตามตารางที่ 2

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Sum of Squares	F - ratio
1 Factor Classification				
1	2.875	2	1.437	0.1333
2	5.844	1	5.844	0.5422
3	27,745.41	2	13,872.70	1,287.1558**
2 Factor Interaction				
1 x 2	21.6563	2	10.8281	1.0046
2 x 3	281.1250	2	140.5625	13.0418**
1 x 3	19.9063	4	4.9766	0.4617
3 Factor 1 x 2 x 3	29.6875	4	7.4218	0.6886
Error	776	72	10.7777	
Total	28,882.5	89		

$(F_{1,72,0.99} \approx 7.00$; $F_{2,72,0.99} \approx 4.80$; $F_{4,72,0.99} \approx 3.50)$

โดย Factor 1 = PLAN ต่าง ๆ (มี 3 กลุ่ม)
Factor 2 = เพศ (ชาย และหญิง)
Factor 3 = ระดับความสามารถ (เก่ง กลาง และอ่อน)

จากตารางที่ 5 แสดงว่าพื้นฐานเดิม (จากคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน) ของนักศึกษาทั้งสามกลุ่มเป็นดังนี้

1. คะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาทั้งสามกลุ่มเท่ากัน
2. คะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาเพศชายและหญิงเท่ากัน
3. ระดับความสามารถของนักศึกษาไม่เท่ากัน (เป็นไปตามที่กำหนดไว้) กล่าวคือ นักศึกษากลุ่มเก่งมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักศึกษากลุ่มปานกลาง และนักศึกษากลุ่มปานกลางมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักศึกษากลุ่มอ่อน
4. ไม่มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างปัจจัยต่าง ๆ ยกเว้นเพศกับระดับความสามารถของนักศึกษา จากการทดสอบโดยวิธี Least Significant Difference ปรากฏผลว่า นักศึกษากลุ่มอ่อนในเพศชายมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักศึกษากลุ่มอ่อนในเพศหญิง

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้คาดการณ์ล่วงหน้า ว่านักศึกษากลุ่มอ่อนคงจะต้องมีการเพิกถอน (drop) ออกจำนวนมาก จึงสุ่มกลุ่มนี้ให้มีจำนวนมากกว่ากลุ่มอื่น ๆ แม้กระนั้นก็ตาม หลังจากหมดกำหนดเขตการเพิกถอนแล้ว ปรากฏว่ามีนักศึกษากลุ่มอ่อนบางกลุ่มเหลือเพียง 5 คนเท่านั้น จากเดิม 16 คน จึงจำเป็นต้องคัดกลุ่มอื่น ๆ ให้เหลือเพียงกลุ่มละ 5 คนเท่ากัน เพื่อให้มีจำนวนซ้ำ (Replication) แต่ละกลุ่มเท่ากันตลอด

วิธีการคัดเลือกใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

กลุ่มเก่ง ตัดรายชื่อนักศึกษาที่ได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานน้อยที่สุดขึ้นไปตามลำดับจากกลุ่มเก่ง เพื่อให้เหลือนักศึกษาที่เก่ง ๆ 5 คนแรกจากกลุ่มเก่งกลุ่มละ 10 คน (กลุ่มเก่งมี 3 กลุ่ม)

กลุ่มปานกลาง ตัดรายชื่อนักศึกษาที่ได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานสูงสุด และต่ำสุดตามลำดับจากกลุ่มปานกลาง เพื่อให้เหลือนักศึกษาระดับกลาง ๆ 5 คน จากกลุ่มปานกลางกลุ่มละ 10 หรือ 11 คน (กลุ่มปานกลางมี 3 กลุ่ม)

กลุ่มอ่อน ตัดรายชื่อนักศึกษาที่ได้คะแนนสูงสุดลงมาตามลำดับจากกลุ่มอ่อน เพื่อให้เหลือนักศึกษาที่ได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานต่ำสุด 5 คนสุดท้ายของแต่ละกลุ่มอ่อน (กลุ่มอ่อนมี 3 กลุ่ม)

เหตุผลของการคัดเลือกตามหลักเกณฑ์ดังกล่าว ก็เพื่อให้มีความมั่นใจว่ากลุ่มทั้งสามมีความสามารถแตกต่างกันจริง ๆ

ผลการวิเคราะห์

คะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาแต่ละกลุ่ม ได้ผลดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 แสดงค่าสถิติพื้นฐาน (คะแนนเฉลี่ย) จากการทดสอบหลังจากสอนจบ 2 – 3 วัน

	ชาย			หญิง			
	เก่ง	กลาง	อ่อน	เก่ง	กลาง	อ่อน	เฉลี่ยรวม
สอนโดยใช้คู่มือและเทป	16.6	13.2	11.2	17.2	13.2	8.4	13.3
สอนโดยใช้คู่มือ	18.0	11.2	11.2	17.4	13.2	8.8	13.3
สอนแบบเก่า	17.2	11.0	11.4	16.2	9.4	10.4	12.6
เฉลี่ยรวม	17.3	11.8	11.3	16.9	11.9	9.2	13.1
	13.4			12.7			

ผลจากตารางที่ 6 แสดงให้เห็นค่าเฉลี่ยของคะแนน (เต็ม 20) ที่ได้จากการทดสอบของกลุ่มทดลองที่สอนด้วยวิธีต่าง ๆ โดยแบ่งตามเพศและระดับความสามารถ แต่ก็ไม่สามารถตอบได้ว่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยที่ปรากฏในตารางนั้น มีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ ผู้วิจัยจึงใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสามทาง เพื่อหาคำตอบ ผลการวิเคราะห์ปรากฏในตารางถัดไป

ตารางที่ 7 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนน จากผลการทดสอบหลังสอนจบ 2 - 3 วัน

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Mean Sum of Squares	F - ratio
1 Factor Classification				
1	8.600586	2	4.300293	0.4997116
2	10.67774	1	10.67774	1.240796
3	779.4668	2	389.7334	45.2886**
2 Factor Interaction				
1 x 2	3.088867	2	1.544434	0.1794695
2 x 3	23.02246	2	11.51123	1.337652
1 x 3	43.13282	4	10.7832	1.253052
3 Factor Interaction				
1 x 2 x 3	21.31152	4	5.327881	0.619121
Error	619.5996	72	8.60555	
Total	1508.9	89		

$(F_{1,72,0.99} \approx 7.00\ ;\ F_{2,72,0.99} \approx 4.80\ ;\ F_{4,72,0.99} \approx 3.50)$

เมื่อ Factor 1 = วิธีการสอน

Factor 2 = เพศ

Factor 3 = ระดับของผู้เรียน

จากตารางที่ 7 แสดงว่า

1. ไม่มีความแตกต่างระหว่างคะแนนที่ได้จากผลการสอนทั้งสามวิธี
2. ไม่มีความแตกต่างระหว่างคะแนนที่ได้จากแต่ละเพศ
3. มีความแตกต่างระหว่างคะแนนของผู้เรียนทั้งสามระดับ
4. ไม่มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างวิธีการสอนกับเพศ
5. ไม่มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างเพศกับระดับของผู้เรียน
6. ไม่มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างวิธีการสอนกับระดับของผู้เรียน
7. ไม่มีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างวิธีการสอน เพศ และระดับของผู้เรียน

ผลการวิเคราะห์แบบทดสอบ

1. ค่าระดับความยากง่าย (P) โดยเฉลี่ย = 0.63
   แสดงว่าความยากง่ายอยู่ในระดับที่เหมาะสม
2. ค่าอำนาจจำแนก (r) โดยเฉลี่ย = 0.40
   แสดงว่าอำนาจจำแนกอยู่ในระดับพอใช้
3. ค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบ = 0.73
   แสดงว่าแบบทดสอบมีความน่าเชื่อถือค่อนข้างสูง

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ระหว่างผลการสอนสามแบบ คือ

แบบที่หนึ่ง ผลการสอนแบบเก่า (ไม่ใช้คาสเซตเทป)
แบบที่สอง สอนตามคู่มือการสอนและบรรยายประกอบ (ไม่ใช้คาสเซตเทป)
แบบที่สาม สอนตามคู่มือการสอน ฟังคำบรรยายจากคาสเซตเทป
และผู้สอนอธิบายประกอบ

2. เพื่อสร้างบทเรียนและคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอน เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ ของมหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปี พ.ศ.2523

3. เพื่อช่วยให้นักศึกษาที่เรียนอ่อนหรือเรียนไม่เข้าใจ เรื่อง "ลำดับและอนุกรม" ในชั้นเรียน สามารถนำไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนได้

สมมุติฐานของการวิจัย

1. นักศึกษากลุ่มอ่อน เมื่อใช้คู่มือการสอนหรือคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนแล้ว จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้สูงกว่ากลุ่มอ่อนที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบเก่า (แบบธรรมดาหรือแบบปกติ)

2. นักศึกษากลุ่มปานกลางและกลุ่มเก่ง จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ไม่แตกต่างกันระหว่างการสอนโดยใช้คู่มือการสอนหรือคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอน กับวิธีการสอนแบบเก่า

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ เป็นนักศึกษาคณะบริหารธุรกิจ ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยกรุงเทพ ปีการศึกษา 2529 จำนวน 243 คน (ผู้ชาย 109 คน และหญิง 134 คน) แบ่งออกเป็นสามกลุ่ม คือ กลุ่มเก่ง 61 คน (ชาย 30 คน และหญิง 31 คน) กลุ่มปานกลาง 62 คน (ชาย 31 คน และหญิง 31 คน) และกลุ่มอ่อน 120 คน (ชาย 48 คน และหญิง 72 คน) โดยอาศัยคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานมากำหนดในการแบ่งระดับความสามารถของผู้ถูกทดลอง

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

2.1 คู่มือการสอน (หรือเอกสารคำสอน) ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2.2 เครื่องเล่นเทป และคาสเซตเทป

2.3 แบบทดสอบ 1 ฉบับ

2.4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณ

3. การดำเนินการทดลอง

3.1 การสอน

กลุ่มที่ 1 (PLAN 7 A + B) สอนโดยใช้คู่มือการสอนและเปิดคาสเซตเทปซึ่งบรรยายตามคู่มือ และหยุดเป็นช่วง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัด และผู้สอนอธิบายประกอบในส่วนที่ผู้เรียนไม่เข้าใจ

กลุ่มที่ 2 (PLAN 7 C + D) สอนโดยใช้คู่มือการสอน และผู้สอนบรรยายประกอบตามคู่มือ (ไม่เปิดคาสเซตเทป)

กลุ่มที่ 3 (PLAN 10 A + B) สอนโดยไม่ใช้คู่มือการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แต่ใช้เอกสารเตรียมสอนที่ผู้สอนเคยสอนในรุ่นก่อน ๆ ซึ่งเป็นวิธีการสอนที่ใช้สอนโดยทั่ว ๆ ไป

ผู้สอนเป็นอาจารย์ประจำแผนกคณิตศาสตร์ และสอนทั้งสามกลุ่ม โดยผู้สอน (ไม่ใช่ผู้วิจัย) คนเดียวกัน

3.2 การทดสอบ

แบบทดสอบมี 20 ข้อ ชนิดเลือกตอบแบบ 5 ตัวเลือก ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง สอบหลังจากสอนจบไปแล้ว 2 - 3 วัน

การวิเคราะห์ข้อมูล

วิเคราะห์ค่าต่าง ๆ เพื่อวัตถุประสงค์ดังนี้

1. การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ เพื่อดูประสิทธิภาพของเครื่องมือที่ใช้

2. การหาค่าสถิติขั้นพื้นฐาน (ค่าเฉลี่ย) เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้อย่างคร่าว ๆ

3. การวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนแบบองค์ประกอบสามตัว (Three – Way Analysis of Variance) เพื่อดูความมีนัยสำคัญของความแตกต่างในข้อ 2

4. วิเคราะห์ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่ โดยวิธี Least Significant Difference

อภิปรายผล

1. ปฏิเสธสมมุติฐานที่ 1 นั่นคือ

นักศึกษากลุ่มอ่อน เมื่อใช้คู่มือ หรือ คาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนแล้ว จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้ ไม่แตกต่างจากกลุ่มอ่อนที่เรียนโดยวิธีการเรียนการสอนแบบเก่า

ก่อนการวิจัย ผู้วิจัยมีความเชื่อว่า ถ้าสร้างบทเรียน (คู่มือ) ให้เหมาะสมและบรรยาย (อัดเสียง) ตามให้น่าฟังและสอดคล้องตามลำดับการเรียนรู้แล้ว ก็น่าจะช่วยให้นักศึกษากลุ่มอ่อนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้สูงกว่าการสอนโดยวิธีเก่า แต่ผลปรากฏว่าผลลัพธ์ไม่เป็นไปตามที่คาดไว้ ทั้งนี้อาจจะเป็นเพราะ

1.1 บทเรียน (คู่มือ) ยังไม่ได้คุณภาพ หรือ

1.2 บทเรียนอาจจะมีคุณภาพ แต่เสียงบรรยายอาจจะไม่น่าสนใจ ไม่น่าติดตาม (ทำให้น่าเบื่อหน่าย) ทั้งนี้เพราะน้ำเสียงเป็นสิ่งสำคัญมากในการสื่อสาร จึงควรจะต้องพิถีพิถันเป็นพิเศษ ให้สอดคล้องกับหลักการใช้เสียง ดังที่นิพนธ์ ศศิธร (2515) กล่าวว่า หลักการใช้เสียงในการพูดบรรยาย คือ

ก. เสียงดังพอ

ข. เสียงจะต้องมีท่วงทำนองน่าสนใจ

ค. เสียงจะต้องเป็นเสียงแท้ที่เสนาะหู

ง. เสียงควรมีช่วงเวลาแตกต่างกันมากพอ

จ. เสียงจะต้องมีความชัดเจน และถูกต้องพอ

นอกจากนี้ ข้อควรระวังในการสนทนาก็คือ (ชม ภูมิภาค, 2520) อย่าให้การสนทนาเป็นปาฐกถา หรือการอภิปรายเกินไป ต้องเป็นการพูดคุยธรรมดา เป็นธรรมชาติในเรื่องที่เป็นสาระ เพื่อเป็นการรักษาความสนใจของผู้ฟัง ควรเพิ่มเกร็ดขำขัน และประสบการณ์ส่วนตัวเข้าไปด้วย พยายามหลีกเลี่ยงรายละเอียดที่ไม่สำคัญและผู้ฟังไม่รู้จัก พูดตรงไปตรงมา อย่าอ้อมค้อมให้เข้าใจแจ่มแจ้งทันที

2. ยอมรับสมมุติฐานที่ 2 นั่นคือ

นักศึกษากลุ่มปานกลางและกลุ่มเก่ง ไม่ว่าจะสอนโดยวิธีการใดก็ตาม จะไม่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้แตกต่างกัน

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทางประยุกต์

1.1 การใช้บทเรียนและคาสเซตเทปในห้องเรียน

ในกรณีที่ผู้สอนต้องการเปลี่ยนบรรยากาศจากการสอนโดยการใช้กระดานดำเหมือนกับที่สอนโดยทั่ว ๆ ไป ก็สามารถใช้คู่มือและคาสเซตเทปประกอบการเรียนการสอนในห้องเรียนได้ โดยผู้สอนจะต้องเตรียมตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดที่ยาก ๆ ให้นักศึกษากลุ่มเก่งทำเพิ่มเติม และผู้สอนควรจะเดินดูหรือช่วยแนะนำกลุ่มอ่อนที่ตามไม่ทันกลุ่มอื่น

นอกจากนี้ ยังสามารถนำมาใช้ในห้องเรียนในกรณีที่ผู้สอนไม่สบาย (เช่นเป็นหวัดหรือไม่มีเสียง) หรือในกรณีที่ผู้สอนไม่ว่างที่จะสอน อาจจะให้ตัวแทน (นักศึกษาที่เรียนเก่งหรืออาจารย์ท่านอื่น ๆ) นำไปสอนแทนก็ได้

1.2 การใช้บทเรียน และคาสเซตเทป เพื่อช่วยเหลือกลุ่มอ่อน

ควรจะแนะนำให้นักศึกษาที่อ่อนวิชาคณิตศาสตร์ นำบทเรียน และคาสเซตเทปไปอ่านและฟังล่วงหน้า เพื่อให้สามารถเรียนให้ทันในห้องเรียน หรืออาจจะนำไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนก็ได้

2. ข้อเสนอแนะทางวิจัย

2.1 การระวังเรื่องจำนวนตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อมูล จำนวนซ้ำ (Replication) ยิ่งมาก ความเที่ยงตรงของการวิจัยก็ยิ่งสูงไปด้วย แต่ข้อเท็จจริงก็คือ นักศึกษาที่เรียนอ่อน มีโอกาสที่จะถอน (drop) วิชาเรียนมากอาจจะทำให้จำนวนซ้ำขาดหายไปมากกว่าที่วางแผนไว้

2.2 องค์ประกอบที่อาจจะมีผลต่อการเรียนรู้

สำนวนคำบรรยาย และเสียงที่ใช้ในการบรรยายอาจจะเป็นปัจจัยที่สำคัญที่มีผลต่อการเรียนรู้ ควรจะมีการวิจัยหารูปแบบของเสียงที่เหมาะสม เช่น ให้ผู้บรรยายเป็นวัยเดียวกันกับผู้ฟัง หรือหาผู้บรรยายที่มีเสียงเชิญชวนให้น่าฟังและน่าติดตาม มีเกร็ดขำขันแทรกเป็นบางตอน ตามหลักการใช้เสียงในการบรรยายที่ดี หรืออาจจะมีการวิจัยเปรียบเทียบกับการสอนโดยใช้วิดีโอเทป เพื่อพัฒนาวิธีการเรียนการสอนให้ทันสมัยยิ่งขึ้น และมีหลายแบบยิ่งขึ้น

สมคิด เมตไตรพันธ์ *การสอนวิชาถ่ายรูปเป็นรายบุคคลโดยใช้สไลด์เทปเสียง* วิทยานิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2517, 78 หน้า อัดสำเนา

Abramson, Bernard. "A Comparison of Two Methods of Teaching Mechanics in High School," *Science Education*. 39 : 69 - 106 March, 1952.

Bartee, E.M. *Engineering Experimental Design Fundamentals*. New Jersey, Printice - Hall, 1968.

Crowder, Gene Arnold. "Visual Slides and Assembly Models Compared with Convertional Methods in Teaching Industrial Arts," *Dissertation Abstracts*. 29 : 3034 - A, 1969.

Ebel, Robert L. *Measuring Educational Achievement*. New Jersey, Printice - Hall, 1965.

Guilford, Joy Paul. *Fundamental Statistics in Psychology and Education*. 4th ed New York, McGraw - Hill, 1965.

Johnson, Richard E. and others. *College Algebra*. Cummings Publishing Company, Inc., California, 1950.

Lourie, David Robert, Jr. "A Study Comparing the Lecture Method and Tutorial (Slide-Tape) Method of Instruction for A Health Class Unit on Physicial Fitness," *Dissertation Abstracts*. 35 : 7708 - A, 1975.

McGuire, Gertude Mynear. "Pacing Transription With Shorthand Slides : The Effection Speed and Accuracy;" *Dessertation Abstracts*. 31 : 4644, March 1971.

ภาคผนวก ก.

คู่มือการสอน หรือเอกสารคำสอน

พื้นฐานก่อนเรียน

เคล็ดลับในการเรียนวิชาคำนวณให้ได้ผล

1. ควรใช้วิธีทำความเข้าใจ ให้มากกว่าวิธีการท่องจำ
   ถ้าเข้าใจแล้ว จะจำได้นาน
   การท่องจำโดยไม่เข้าใจ จะอยู่ได้ไม่นาน
2. ยิ่งฝึกแก้ปัญหาโจทย์มาก ก็ยิ่งเกิดทักษะมาก
   อ่านสักสิบเที่ยว สู้ทำแบบฝึกหัดครั้งเดียวไม่ได้

พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียน "ลำดับและอนุกรม"

1. เกี่ยวกับ 0 และ ∞

1.1) $2(\infty) + 3$ หรือ $2(\infty) - 3 = ?$

<u>ตอบ</u> ∞

<u>เหตุผล</u> สัญลักษณ์ ∞ แทนปริมาณที่มีค่ามาก จนกำหนดขอบเขตไม่ได้

$\therefore$ เมื่อนำจำนวนจริงใด ๆ ไปคูณแล้วไปบวกหรือลบกับจำนวนจริงอื่น ๆ ก็ย่อมจะมีค่ามากมายเช่นเดิม

1.2) $4^0 = ?$

<u>ตอบ</u> 1

<u>จำไว้</u> จำนวนจริงใด ๆ (ที่ไม่เป็น 0) เมื่อยกกำลังศูนย์แล้วจะเป็น 1 เสมอ

อย่าสับสนกับ $0^4 = (0)(0)(0)(0) = 0$

1.3) $\frac{0}{4} = ?$

<u>ตอบ</u> 0

<u>จำไว้</u> เศษเป็น 0 ส่วนเป็นตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 ผลลัพธ์เป็น 0 เสมอ

1.8) ถ้า $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{6n}{2n+3} = ?$

ตอบ 3

วิธีคิด ให้เอา n หาร ทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\frac{6n}{2n+3} = \frac{\frac{6n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}} = \frac{6}{2+\frac{3}{n}} = \frac{6}{2+\frac{3}{\infty}} = \frac{6}{2+0} = 3 \qquad \square$$

แต่ถ้า n ยกกำลังต่างกัน ให้เอา n ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน เช่น

ตัวอย่าง $\frac{2+3n-4n^2}{5+n^2} = ?$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$

n กำลังสูงสุด คือ n^2

ให้เอา n^2 หารตลอดทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\frac{2+3n-4n^2}{5+n^2} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{4n^2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}} \qquad \ldots \text{(a)}$$

$$= \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}-4}{\frac{5}{n^2}+1} = \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}-4}{\frac{5}{\infty}+1} = \frac{0+0-4}{0+1} \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$= -4 \qquad \square$$

2. $r^{\infty} = ?$

พิจารณา $r > 1$ เช่น $r = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$2^{10} =$ 2 คูณกันสิบครั้ง $= 1,024$

$2^{20} =$ 2 คูณกันยี่สิบครั้ง $= 1,048,576$

$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$

$= (-8)(-2)$

$\therefore (-2)^4 = +16$, จำว่าเลขลบคูณกันจำนวนคี่ครั้งเป็นลบ และจำนวนคู่ครั้งเป็นบวก

3.2) $-2^4 = -(2\times2\times2\times2)$

$= -16$, เอา 2 คูณกันสี่ครั้งแล้วใส่เครื่องหมายลบข้างหน้า

3.3) $-(-2)^4 = -(+16)$, จาก 3.1

$= -16$

3.4) เราเคยมีกฎว่า

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$\therefore 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$= \frac{1}{2x2x2}$

$= \frac{1}{8}$

4. ค่าของฟังค์ชั่น

จาก $f(x) = 2x^3+3x+4$

ทำให้ $f(?) = 2(?)^3+3(?)+4$

เช่น $f(1) = 2(1)^3+3(1)+4$

$= 9$

ในทำนองเดียวกัน $n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3.2.1$

$$= n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)!$$

และ $(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3.2.1$

$$= (n+1)n!$$

$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ 3.2.1$

$$= (n-1)(n-2)!$$

เช่น $\frac{5!}{4!} = \frac{5.4!}{4!} = 5$

หรือ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n$

ตัวอย่าง $\dfrac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = ?$

$$\dfrac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \div \frac{n!}{3^n}$$

$$= \left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)n!}{3^n.\ 3^1}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{3}$$

$\square$

6. Differentiation and Integration

6.1) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เช่น $\frac{dn^3}{dn} = 3n^{3-1} = 3n^2$

6.2) $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ เช่น $\frac{d(\ln n)}{dn} = \frac{1}{n}$

6.3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ เช่น $\int n^3 dn = \frac{n^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}n^4 + C$

ลำดับและอนุกรมอนันต์

(Infinite Sequences and Series)

ลำดับ (Sequence) คืออะไร?

ให้สังเกตการเขียนตัวเลขต่อไปนี้

1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

3) 1, 2, 3, 4, 5, ...

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

5) 2, 4, 8, 16, 32, ...

ทั้งหมดที่กล่าวมาทั้ง 5 ข้อนี้ เราเรียกว่า ลำดับ

∴ ลำดับก็คือ การเขียนตัวเลขเรียงกัน ภายใต้กฎใดกฎหนึ่ง โดยการใส่เครื่องหมายจุลภาค "," คั่นไว้แต่ละค่า

จากลำดับ 2, 4, 6, 8, 10, ...

พจน์ที่ 1

พจน์ที่ 2

พจน์ที่ 3

พจน์ที่ 4

พจน์ที่ 5

พจน์ที่ 1 คือ 2, พจน์ที่ 2 คือ 4, พจน์ที่ 3 คือ 6, พจน์ที่ 4 คือ 8, พจน์ที่ 5 คือ 10

∴ พจน์ที่ 6 คือ ... (เติม)

ทดสอบความเข้าใจ

1) 1, 3, 5, 7, 9, ... เลข 7 คือ พจน์ที่ ... (เติม)

2) 1, 2, 3, 4, 5, ... พจน์ที่ 10 คือ ...... (เติม)

ในทำนองเดียวกัน

1. $\{2(\frac{1}{3})^{n-1}\} = 2(\frac{1}{3})^{1-1}, 2(\frac{1}{3})^{2-1}, 2(\frac{1}{3})^{3-1}, 2(\frac{1}{3})^{4-1}, \ldots$

$= 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$ □

2. $\{3(2)^{n-1}\} = \ldots$

$= \ldots$ (เติม)

3. $\{\frac{2n+1}{4n}\} = \ldots$

$= \ldots$ (เติม)

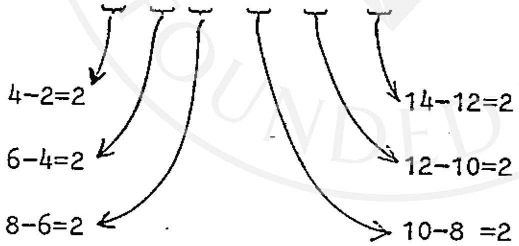
<u>หมายเหตุ</u>

บางครั้งเราใช้ A_n, B_n, C_n หรือ $f(n)$ แทน T_n

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression:AP)

คือลำดับที่มีผลต่างร่วม (Common difference:d) เท่ากันตลอด

ตัวอย่างที่ 3 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...



ผลต่างร่วม (d) คือ 2

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

1) 1,2,3,4,5, ... ผลต่างร่วม คือ 1

2) 11,14,17,20,23, ... ผลต่างร่วม คือ 3

3) 1,-1,-3,-5,-7, ... ผลต่างร่วม คือ -2

4) $1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},3, \ldots$ ผลต่างร่วม คือ $\frac{1}{2}$

5) 1,1,1,1,1, ... ผลต่างร่วม คือ 0

$T_4 = T_3+d = (a+2d)+d = a+3.d$

$T_5 = T_4+d = (a+3d)+d = a+4.d$

$T_n = a+(?)d$

$\therefore \boxed{T_n = a+(n-1)d}$

เช่น ถ้า $a = 2$

$d = 2$ แล้ว

$T_n = a+(n-1)d$

$= 2+(n-1)2,$ แทนค่า a และ d

$= 2+2n-2$

$= 2n$

$\therefore T_n = 2n$

ทำให้ $T_1 = 2(1) = 2$

$T_2 = 2(2) = 4$

$T_3 = 2(3) = 6$

$T_4 = 2(4) = 8$

....

$T_{10} = 2(10) = 20$ เป็นต้น

เขียนอีกแบบหนึ่งเป็น

$\{2n\} = 2,4,6,8,10, \ldots$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเลขคณิต $1,3,5,7,9,\ldots$

จาก $1,3,5,7,9, \ldots$

แสดงว่า $a = 1$

$d = 2$

$$T_n = a+(n-1)d$$
$$= 11+(n-1)10$$
$$= 11+10n-10$$
$$= 10n+1$$
$$\therefore \{T_n\} = \{10n+1\}$$ ☐

3. ลำดับ 1,1,1,1,1, ...

....

....

....

....

....

$\therefore \{T_n\}$ = ... (เติม)

4. ลำดับ $\frac{1}{11},\frac{2}{21},\frac{3}{31},\frac{4}{41},\frac{5}{51}$

สังเกตจากข้อที่ผ่านมา

จะได้ $\{T_n\}$ = ... (เติม)

<u>ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence or Geometric Progression:GP)</u>

คือ ลำดับที่มี<u>อัตราส่วนร่วม</u> (Common ratio:r) เท่ากันตลอด

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

4÷2 = 2

8÷4 = 2

16÷8 = 2

32÷16 = 2

อัตราส่วนร่วม (r) คือ 2

จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะพบว่า

ถ้าให้ ค่าเริ่มต้น $= a$

ผลหารร่วม $= r$ แล้ว

จะได้ $T_1 = a$

$T_2 = rT_1 = ra$

$T_3 = rT_2 = r(ra) = r^2a$ หรือ ar^2

$T4 = rT_3 = r(r^2a) = r^3a$ หรือ ar^3

$T_5 = rT_4 = r(ra) = r^4a$ หรือ ar^4

$T_n = ar^?$

$$\therefore \boxed{T_n = ar^{n-1}}$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จากลำดับเรขาคณิต 2,4,8,16,32, ...

$a = 2$

$r = 2$

$$T_n = \overset{2}{a}\overset{2}{r}^{n-1}$$

$= 2(2)^{n-1}$

$= (2)^1(2)^n(2)^{-1}$

$= 2^n \qquad ; (2)^1(2)^{-1} = (2)^0 = 1$

$\therefore \{T_n\} = \{2^n\}$ ☐

<u>ข้อสังเกตุ</u> $\{2^n\} = 2^1,2^2,2^3,2^4,2^5, \ldots$

$= 2,4,8,16,32, \ldots$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเรขาคณิต 3,9,27,81,243, ...

$a = 3$

$r = 3$

2. ถ้าลำดับเป็น $2, 2(3), 2(3)^2, 2(3)^3, \ldots$ แล้วจงหา $\{T_n\}$

....

....

....

$\therefore \{T_n\} =$ .... (เติม)

3. จากลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$a = 1$

$r = \frac{1}{2}$

$T_n = ar^{n-1}$

$= 1.(\frac{1}{2})^{n-1}$

$= (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore \{T_n\} = \{(\frac{1}{2})^{n-1}\}$ ☐

4. จากลำดับ $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$ จงหา $\{T_n\}$

....

....

....

$\therefore \{T_n\} =$ .... (เติม)

5. ลำดับ $5, 5, 5, 5, \ldots$

$T_n = \overset{5}{a}\overset{1}{r}^{n-1}$

$= 5(1)^{n-1}$ หรือ 5

$\therefore \{T_n\} = \{5\}$ ☐

1.2 การใช้บทเรียน และคาสเซตเทป เพื่อช่วยเหลือกลุ่มอ่อน

ควรจะแนะนำให้นักศึกษาที่อ่อนวิชาคณิตศาสตร์ นำบทเรียน และคาสเซตเทปไปอ่านและฟังล่วงหน้า เพื่อให้สามารถเรียนให้ทันในห้องเรียน หรืออาจจะนำไปศึกษาเพิ่มเติมนอกเวลาเรียนก็ได้

2. ข้อเสนอแนะทางวิจัย

2.1 การระวังเรื่องจำนวนตัวอย่าง

การวิเคราะห์ข้อมูล จำนวนซ้ำ (Replication) ยิ่งมาก ความเที่ยงตรงของการวิจัยก็ยิ่งสูงไปด้วย แต่ข้อเท็จจริงก็คือ นักศึกษาที่เรียนอ่อน มีโอกาสที่จะถอน (drop) วิชาเรียนมากอาจจะทำให้จำนวนซ้ำขาดหายไปมากกว่าที่วางแผนไว้

2.2 องค์ประกอบที่อาจจะมีผลต่อการเรียนรู้

สำนวนคำบรรยาย และเสียงที่ใช้ในการบรรยายอาจจะเป็นปัจจัยที่สำคัญที่มีผลต่อการเรียนรู้ ควรจะมีการวิจัยหารูปแบบของเสียงที่เหมาะสม เช่น ให้ผู้บรรยายเป็นวัยเดียวกันกับผู้ฟัง หรือหาผู้บรรยายที่มีเสียงเชิญชวนให้น่าฟังและน่าติดตาม มีเกร็ดขำขันแทรกเป็นบางตอน ตามหลักการใช้เสียงในการบรรยายที่ดี หรืออาจจะมีการวิจัยเปรียบเทียบกับการสอนโดยใช้วิดีโอเทป เพื่อพัฒนาวิธีการเรียนการสอนให้ทันสมัยยิ่งขึ้น และมีหลายแบบยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

จริยา สระตันติ์ การศึกษาเปรียบเทียบผลการอ่านคำโดยใช้สไลด์กับการสอนตามปกติของนักเรียนที่จบชั้นประถมปีที่ 1 ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัย วิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513, 85 หน้า อัดสำเนา

เฉลิม คิดชัย การสอนวิชาอุตสาหกรรมศิลป์เป็นรายบุคคล โดยใช้สไลด์เทปเสียง วิทยานิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2515, 126 หน้า อัดสำเนา

ชม ภูมิภาค หลักการประชาสัมพันธ์ โอเดียนสโตร์ 2516, 547 หน้า

นิพนธ์ ศศิธร หลักการพูดต่อชุมนุมชน คณะสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2515, 414 หน้า

ประภา ภูวธน การทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ข้อความจริงในวิชาวิทยาศาสตร์จากการใช้สไลด์กับรูปภาพประกอบการสอน ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2515, 44 หน้า อัดสำเนา

ปราโมทย์ เทพพัลลภ การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาอีเลคโทรนิคเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยวิธีเรียนด้วยตนเองจากเทปโทรทัศน์ สไลด์เทป และการเรียนในชั้นตามปกติ ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 82 หน้า อัดสำเนา

พฤฒิพงษ์ เล็กศิริรัตน์ การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ ชั้นประถมปีที่ 5 โดยใช้สไลด์เทปเสียงกับสมุดภาพแบบโปรแกรม ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 67 หน้า อัดสำเนา

วัฒนา สุนทรธัย และคณะ คณิตศาสตร์ธุรกิจ แผนกตำราและคำสอน มหาวิทยาลัยกรุงเทพ 2524, 185 หน้า

สมคิด เมตไตรพันธ์ การสอนวิชาถ่ายรูปเป็นรายบุคคลโดยใช้สไลด์เทปเสียง วิทยานิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2517, 78 หน้า อัดสำเนา

Abramson, Bernard. "A Comparison of Two Methods of Teaching Mechanics in High School," Science Education. 39 : 69 - 106 March, 1952.

Bartee, E.M. Engineering Experimental Design Fundamentals. New Jersey, Printice - Hall, 1968.

Crowder, Gene Arnold. "Visual Slides and Assembly Models Compared with Convertional Methods in Teaching Industrial Arts," Dissertation Abstracts. 29 : 3034 - A, 1969.

Ebel, Robert L. Measuring Educational Achievement. New Jersey, Printice - Hall, 1965.

Guilford, Joy Paul. Fundamental Statistics in Psychology and Education. 4th ed New York, McGraw - Hill, 1965.

Johnson, Richard E. and others. College Algebra. Cummings Publishing Company, Inc., California, 1950.

Lourie, David Robert, Jr. "A Study Comparing the Lecture Method and Tutorial (Slide-Tape) Method of Instruction for A Health Class Unit on Physicial Fitness," Dissertation Abstracts. 35 : 7708 - A, 1975.

McGuire, Gertude Mynear. "Pacing Transription With Shorthand Slides : The Effection Speed and Accuracy;" Dessertation Abstracts. 31 : 4644, March 1971.

Wittich, Walter Arno and Charles Francis Schuller. Audio Visual Materials : Their Nature and Usc. New York, Harper and Brother, 1957.

Wittig, Arno F., Gurney Williams. Psychology : an Introduction. New York, McGraw-Hill Book Company, 1984.

Wong, Clark Chio-Yuen. "Comparative Effectiveness in the Lecture and Slide-Tape Approach for Orientation in the Use of Learning Materials Center," Dessertation Abstracts International. 30 : 7028 - A, 1976.

Zyve, Claire T. "Experimental Study of the Teaching of Arithmatic Combination." Education Methodology. September, 1932.

ภาคผนวก ก.

คู่มือการสอน หรือเอกสารคำสอน

เอกสารคำสอน

วิชา คณ. 102 : คณิตศาสตร์ธุรกิจ

(MA. 102 : Business Mathematics)

หัวข้อ

ลำดับ และอนุกรม

(Sequences and Series)

ข้อตกลงเบื้องต้น

ในทางคณิตศาสตร์

เราเขียน " $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$ "

อ่านว่า " limit ของ $\frac{5}{x}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 เป็น ∞ "

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ " $\frac{5}{x}$ ไม่มี limit เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 "

แต่เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการอ้างอิง เราจะเขียนตามแบบที่คุ้นเคย ดังนี้

$$\frac{5}{0} = \infty$$

และ limit ของฟังก์ชั่นอื่น ๆ ในทำนองเดียวกันนี้ ก็จะเขียนในแนวเดียวกันนี้

พื้นฐานก่อนเรียน

เคล็ดลับในการเรียนวิชาคำนวณให้ได้ผล

1. ควรใช้วิธีทำความเข้าใจ ให้มากกว่าวิธีการท่องจำ

   ถ้าเข้าใจแล้ว จะจำได้นาน

   การท่องจำโดยไม่เข้าใจ จะอยู่ได้ไม่นาน

2. ยิ่งฝึกแก้ปัญหาโจทย์มาก ก็ยิ่งเกิดทักษะมาก

   อ่านสักสิบเที่ยว สู้ทำแบบฝึกหัดครั้งเดียวไม่ได้

พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียน "ลำดับและอนุกรม"

1. เกี่ยวกับ 0 และ ∞

1.1) $2(\infty) + 3$ หรือ $2(\infty) - 3 = ?$

ตอบ ∞

เหตุผล สัญลักษณ์ ∞ แทนปริมาณที่มีค่ามาก จนกำหนดขอบเขตไม่ได้

$\therefore$ เมื่อนำจำนวนจริงใด ๆ ไปคูณแล้วไปบวกหรือลบกับจำนวนจริงอื่น ๆ ก็ย่อมจะมีค่ามากมายเช่นเดิม

1.2) $4^0 = ?$

ตอบ 1

จำไว้ จำนวนจริงใด ๆ (ที่ไม่เป็น 0) เมื่อยกกำลังศูนย์แล้วจะเป็น 1 เสมอ

อย่าสับสนกับ $0^4 = (0)(0)(0)(0) = 0$

1.3) $\frac{0}{4} = ?$

ตอบ 0

จำไว้ เศษเป็น 0 ส่วนเป็นตัวเลขที่ไม่ใช่ 0 ผลลัพธ์เป็น 0 เสมอ

1.4) $\frac{5}{\infty} = ?$

ตอบ 0

เหตุผล เศษเป็นค่าคงที่ ส่วนยิ่งมีค่ามาก ผลลัพธ์ยิ่งมีค่าน้อย

$\therefore$ เมื่อส่วนเป็น ∞ ผลลัพธ์จึงเป็น 0

ตัวอย่างอื่น ๆ เช่น

ก) $\frac{2 + \frac{3}{\infty}}{4 - \frac{5}{\infty}} = \frac{2 + 0}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ข) $(1 + \frac{6}{\infty})^{\frac{7}{\infty}} = (1 + 0)^0 = 1^0 = 1$

1.5) $\frac{6}{0} = ?$

ตอบ ∞

เหตุผล เศษคงที่ ส่วนยิ่งมีค่าน้อย ผลลัพธ์ยิ่งมีค่ามาก

$\therefore$ เมื่อส่วนเป็น 0 ผลลัพธ์จึงเป็น ∞

1.6) $\log \infty - \log \infty = ?$

$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$\frac{\sqrt{\infty+1} - \sqrt{\infty}}{\infty} = ?$$

ตอบ ไม่ทราบ (ทั้งสาม)

เหตุผล เนื่องจากเราไม่ทราบว่า ∞ จะมีค่ามากเท่าไรกันแน่

$\therefore$ เมื่อนำมา +, −, ×, ÷ กันจึงไม่สามารถบอกค่าแน่นอนได้

1.7) $\frac{0}{0} = ?$

ตอบ ไม่ทราบ

จำไว้ น.ศ.บางคนมักจะเข้าใจว่า $\frac{0}{0} = 0$, $\frac{0}{0} = 1$ หรือ $\frac{0}{0} = \infty$ ซึ่งเป็นความเข้าใจผิด ความจริงแล้วไม่มีผลลัพธ์ที่แน่นอน

1.8) ถ้า $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{6n}{2n+3} = ?$

ตอบ 3

วิธีคิด ให้เอา n หาร ทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\frac{6n}{2n+3} = \frac{\frac{6n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}} = \frac{6}{2+\frac{3}{n}} = \frac{6}{2+\frac{3}{\infty}} = \frac{6}{2+0} = 3$$

☐

แต่ถ้า n ยกกำลังต่างกัน ให้เอา n ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน เช่น

ตัวอย่าง $\frac{2+3n-4n^2}{5+n^2} = ?$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$

n กำลังสูงสุด คือ n^2

ให้เอา n^2 หารตลอดทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\frac{2+3n-4n^2}{5+n^2} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{4n^2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}} \qquad \ldots \text{(a)}$$

$$= \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}-4}{\frac{5}{n^2}+1} = \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}-4}{\frac{5}{\infty}+1} = \frac{0+0-4}{0+1} \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$= -4$$

☐

2. $r^{\infty} = ?$

พิจารณา $r > 1$ เช่น $r = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

2^{10} = 2 คูณกันสิบครั้ง = 1,024

2^{20} = 2 คูณกันยี่สิบครั้ง = 1,048,576

ยิ่งยกกำลังมาก ค่าก็ยิ่งมาก ดังนั้น $2^{\infty} = \infty$

เราจึงสรุปได้ว่า $r^{\infty} = \infty$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $r < -1$ แล้ว $r^{\infty} = \pm\infty$ นั่นคือ $\boxed{|r| > 1 \rightarrow r^{\infty} = \pm\infty}$

พิจารณา $-1 < r < 1$ เช่น $r = \frac{1}{2}$

$$(\tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} = 0.25$$

$$(\tfrac{1}{2})^3 = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} = 0.125$$

$$(\tfrac{1}{2})^4 = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{16} = 0.0625$$

$(\frac{1}{2})^{10} = (\frac{1}{2})$ คูณกันสิบครั้ง $= 0.00009765625$

ยิ่งยกกำลังมาก ค่าก็ยิ่งลดลง ดังนั้น $(\frac{1}{2})^{\infty} = 0$

เราจึงสรุปได้ว่า $r^{\infty} = 0$ นั่นคือ $\boxed{|r| < 1 \longrightarrow r^{\infty} = 0}$

$\therefore$ เรากล่าวได้ว่า $|r| < 1 \longrightarrow r^{\infty} = 0$

$|r| > 1 \longrightarrow r^{\infty} = \pm\infty$

<u>หมายเหตุ</u>

$|r| < 1$ หมายถึง $-1 < r < 1$

$|r| > 1$ หมายถึง $r > 1$ หรือ $r < -1$

$|r| = 1$ หมายถึง $r = 1$ หรือ $r = -1$

3. ความแตกต่างระหว่าง $(-2)^4$, -2^4, $-(-2)^4$ และ 2^{-3}

3.1) $(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$, เครื่องหมายเหมือนกัน คูณหรือหารกันได้+เสมอ

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$$

$$= (+4)(-2)$$

$= -8$, เครื่องหมายต่างกัน คูณหรือหารกันได้ – เสมอ

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$$

$$= (-8)(-2)$$

$\therefore (-2)^4 = +16$, จำว่าเลขลบคูณกันจำนวนคี่ครั้งเป็นลบ และจำนวนคู่ครั้งเป็นบวก

3.2) $-2^4 = -(2\times2\times2\times2)$

$= -16$, เอา 2 คูณกันสี่ครั้งแล้วใส่เครื่องหมายลบข้างหน้า

3.3) $-(-2)^4 = -(+16)$, จาก 3.1

$= -16$

3.4) เราเคยมีกฎว่า

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$= \frac{1}{2x2x2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

4. ค่าของฟังค์ชั่น

จาก $f(x) = 2x^3+3x+4$

ทำให้ $f(?) = 2(?)^3+3(?)+4$

เช่น $f(1) = 2(1)^3+3(1)+4$

$= 9$

หรือ $f(3) = 2(3)^3+3(3)+4$

$= 2(27)+3(3)+4$

$= 54+9+4$

$= 67$

เรามีวิธีการเขียนอีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$T_n = 2n^3+3n+4$

$T_1 = 2(1)^3+3(1)+4$

$= 9$

$T_3 = 2(3)^3+3(3)+4$

$= 67$ เป็นต้น

5. การทอนเศษส่วน (การตัดกัน)

5.1) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

$= (\frac{a}{b}).(\frac{d}{c})$

5.2) $x^{a+b} = x^a . x^b$ เช่น $2^{n+1} = 2^n . 2^1$

$x^{a-b} = x^a . x^{-b}$ เช่น $2^{n-1} = 2^n . 2^{-1}$

5.3) Factorial : $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

เช่น $4! = 4.3.2.1$

$5! = 5.4.3.2.1$

เราเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$5! = 5.\overset{4!}{\boxed{4.3.2.1}}$

$= 5.4!$

หรือ $5! = 5.4.3!$ เมื่อ $3! = 3.2.1$

ในทำนองเดียวกัน $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

$$= n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)!$$

และ $(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

$$= (n+1)n!$$

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3.2.1$$

$$= (n-1)(n-2)!$$

เช่น $\frac{5!}{4!} = \frac{5.4!}{4!} = 5$

หรือ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n$

ตัวอย่าง $\dfrac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = ?$

$$\dfrac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \div \frac{n!}{3^n}$$

$$= \left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)n!}{3^n . 3^1}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{3}$$

□

6. Differentiation and Integration

6.1) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เช่น $\frac{dn^3}{dn} = 3n^{3-1} = 3n^2$

6.2) $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ เช่น $\frac{d(\ln n)}{dn} = \frac{1}{n}$

6.3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ เช่น $\int n^3 dn = \frac{n^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}n^4 + C$

6.4) $\int(\frac{1}{x})dx = lnx + C, x > 0$ เช่น $\int\frac{1}{n}dn = lnn + C$

6.5) $_a\int^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

<u>ตัวอย่าง</u> $\int_1^\infty d(x^{-2}) = ?$

$$\int_1^\infty d(x^{-2}) = \int_1^\infty (-2)x^{-3}dx \quad ; \quad dx^{-2} = -2x^{-3}dx$$

$$= (-2) \int_1^\infty x^{-3}dx$$

$$= (-2).\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^\infty \quad ; \quad \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= x^{-2}\Big|_1^\infty$$

$$= \frac{1}{x^2}\Big|_1^\infty$$

$$= \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} = 0-1 = -1$$

$\square$

<u>แบบทดสอบก่อนเรียน</u>

1. ถ้า $x \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{(\frac{1}{3})^x + 4}{3^{\frac{1}{x}} + 2^x} = ?$

2. จงหา S_2 จาก $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ ถ้า $a = 2, r = \frac{1}{2}$

3. จงหา $\frac{T_4 - T_1}{a}$ ถ้า $T_n = ar^{n-4}$ และ $r = 3$

4. ถ้า $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{T_{n+1}}{T_n} = ?$ ถ้า $T_n = \frac{2^{n-1}}{n}$

5. จงหา $\int_1^\infty (n^{-1} + n^{-2})\, dn$

****

ลำดับและอนุกรมอนันต์

(Infinite Sequences and Series)

ลำดับ (Sequence) คืออะไร?

ให้สังเกตการเขียนตัวเลขต่อไปนี้

1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

3) 1, 2, 3, 4, 5, ...

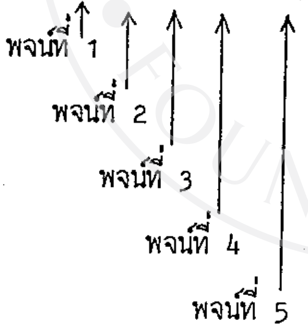
4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

5) 2, 4, 8, 16, 32, ...

ทั้งหมดที่กล่าวมาทั้ง 5 ข้อนี้ เราเรียกว่า ลำดับ

∴ ลำดับก็คือ การเขียนตัวเลขเรียงกัน ภายใต้กฎใดกฎหนึ่ง โดยการใส่เครื่องหมายจุลภาค "," คั่นไว้แต่ละค่า

จากลำดับ 2, 4, 6, 8, 10, ...



พจน์ที่ 1 คือ 2, พจน์ที่ 2 คือ 4, พจน์ที่ 3 คือ 6, พจน์ที่ 4 คือ 8, พจน์ที่ 5 คือ 10

∴ พจน์ที่ 6 คือ ... (เติม)

ทดสอบความเข้าใจ

1) 1, 3, 5, 7, 9, ... เลข 7 คือ พจน์ที่ ... (เติม)

2) 1, 2, 3, 4, 5, ... พจน์ที่ 10 คือ ...... (เติม)

3) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ พจน์ที่ 6 คือ ... (เติม)

4) $3, 3(2), 3(2)^2, 3(2)^3, 3(2)^4, \ldots$ พจน์ที่ 3 คือ ...

$\therefore$ พจน์ที่ 7 คือ ... (เติม)

การเขียนลำดับ

เราเขียนลำดับได้อีกรูปแบบหนึ่ง เป็นดังนี้

$\{T_n\} = T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$

เมื่อ T_n = พจน์หรือเทอม (Term) ทั่วไป

โดยที่ $n = 1,2,3,4,5, \ldots$

เช่น $T_n = 2n - 1$

จะได้ $T_1 = 2(1)- 1 = 1$

$T_2 = 2(2)- 1 = 3$

$T_3 = 2(3)- 1 = 5$

$T_4 = 2(4)- 1 = 7$

$T_5 = 2(?)- 1 = 9$

$\therefore \{2n-1\} = 1,3,5,7,9, \ldots$

ตัวอย่างที่ 1 $\{2n + 1\} = ?$

$\{2n+1\} = 2(1)+1, 2(2)+1, 2(3)+1, 2(4)+1, \ldots$

$= 3 , 5 , 7 , 9 , \ldots$ ☐

ตัวอย่างที่ 2 $\{\frac{3^{n-1}}{3n-2}\} = ?$

$$\{\frac{3^{n-1}}{3n-2}\} = \frac{3^{1-1}}{3(1)-2}, \frac{3^{2-1}}{3(2)-2}, \frac{3^{3-1}}{3(3)-2}, \frac{3^{4-1}}{3(4)-2}, \ldots$$

$$= \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{27}{10}, \ldots$$ ☐

ในทำนองเดียวกัน

1. $\{2(\frac{1}{3})^{n-1}\} = 2(\frac{1}{3})^{1-1}, 2(\frac{1}{3})^{2-1}, 2(\frac{1}{3})^{3-1}, 2(\frac{1}{3})^{4-1}, \ldots$

$= 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$ □

2. $\{3(2)^{n-1}\} = \ldots$

$= \ldots$ (เติม)

3. $\{\frac{2n+1}{4n}\} = \ldots$

$= \ldots$ (เติม)

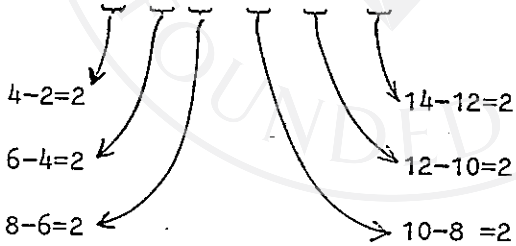
หมายเหตุ

บางครั้งเราใช้ A_n, B_n, C_n หรือ $f(n)$ แทน T_n

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression:AP)

คือลำดับที่มีผลต่างร่วม (Common difference:d) เท่ากันตลอด

ตัวอย่างที่ 3 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...



ผลต่างร่วม (d) คือ 2

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

1) 1,2,3,4,5, ...	ผลต่างร่วม คือ 1
2) 11,14,17,20,23, ...	ผลต่างร่วม คือ 3
3) 1,-1,-3,-5,-7, ...	ผลต่างร่วม คือ -2
4) $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \ldots$	ผลต่างร่วม คือ $\frac{1}{2}$
5) 1,1,1,1,1, ...	ผลต่างร่วม คือ 0

ในทำนองเดียวกัน จาก

1) 1,3,5,7,9, ...

2) 2,4,8,16,32, ...

3) -1,-1,-1,-1,-1,...

4) 1,-1,1,-1,1, ...

5) 1,3,6,10,15, ...

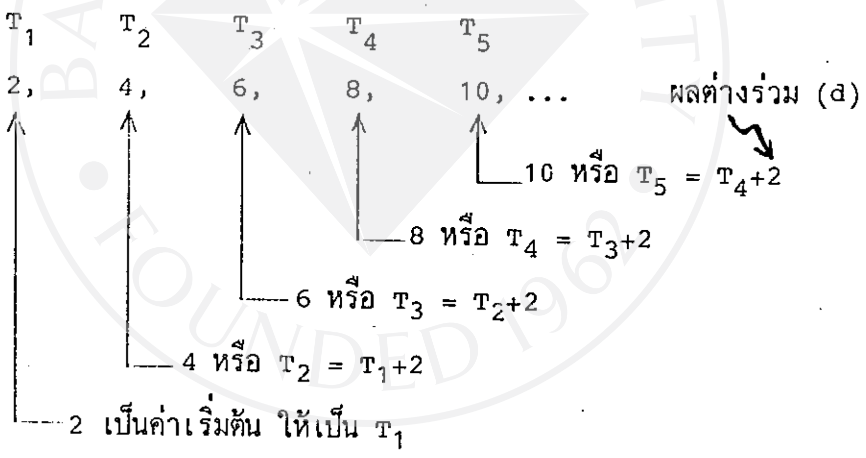
ข้อที่เป็นลำดับเลขคณิต คือ

ข้อ ... ซึ่ง d = ...

ข้อ ... ซึ่ง d = ... (เติม)

การหา T_n ของ A.P.

พิจารณาลำดับเลขคณิต (A.P.) ที่ผ่านมา



จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะพบว่า

ถ้าให้ ค่าเริ่มต้น = a

ผลต่างร่วม = d แล้ว

จะได้ $T_1 = a$

$T_2 = T_1+d = a + d \qquad = a + 1.d$

$T_3 = T_2+d = (a+d)+d \qquad = a + 2.d$

$$T_4 = T_3+d = (a+2d)+d = a+3.d$$

$$T_5 = T_4+d = (a+3d)+d = a+4.d$$

$$T_n = a+(?)d$$

$$\therefore \boxed{T_n = a+(n-1)d}$$

เช่น ถ้า $a = 2$

$d = 2$ แล้ว

$T_n = a+(n-1)d$

$= 2+(n-1)2,$ แทนค่า a และ d

$= 2+2n-2$

$= 2n$

$\therefore T_n = 2n$

ทำให้ $T_1 = 2(1) = 2$

$T_2 = 2(2) = 4$

$T_3 = 2(3) = 6$

$T_4 = 2(4) = 8$

....

$T_{10} = 2(10) = 20$ เป็นต้น

เขียนอีกแบบหนึ่งเป็น

$\{2n\} = 2,4,6,8,10, \ldots$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเลขคณิต 1,3,5,7,9,...

จาก 1,3,5,7,9, ...

แสดงว่า $a = 1$

$d = 2$

และ $T_n = a+(n-1)d$

$= 1+(n-1)2$

$= 2n-1$

$\therefore \{T_n\} = \{2n-1\}$ ☐

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเลขคณิต $4,7,10,13,16, \ldots$

จาก $4,7,10,13,16, \ldots$

แสดงว่า $a = 4$

$d = 3$

$T_n = a+(n-1)d$

$= 4+(n-1)3$

$= 4+3n-3$

$= 3n+1$

$\therefore \{T_n\} = \{3n+1\}$ ☐

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u>

1. ลำดับ $1,2,3,4,5, \ldots$

$a = 1$

$d = 1$

$T_n = a+(n-1)d$

$= 1+(n-1).1$

$= n$

$\therefore \{T_n\} = \{n\}$ ☐

2. ลำดับ $11,21,31,41,51, \ldots$

$a = 11$

$d = 10$

$$
\begin{aligned}
T_n &= a+(n-1)d \\
&= 11+(n-1)10 \\
&= 11+10n-10 \\
&= 10n+1 \\
\therefore \{T_n\} &= \{10n+1\}
\end{aligned}
$$

$\square$

3. ลำดับ 1,1,1,1,1, ...

....

....

....

....

....

$\therefore \{T_n\} =$ .... (เติม)

4. ลำดับ $\frac{1}{11},\frac{2}{21},\frac{3}{31},\frac{4}{41},\frac{5}{51}$

สังเกตจากข้อที่ผ่านมา

จะได้ $\{T_n\} =$ .... (เติม)

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence or Geometric Progression:GP)

คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนร่วม (Common ratio:r) เท่ากันตลอด

ตัวอย่างที่ 6 $\underbrace{2 , 4}, \underbrace{4 , 8}, \underbrace{8 , 16}, \underbrace{16 , 32} , \ldots$

$4 \div 2 = 2$

$8 \div 4 = 2$

$16 \div 8 = 2$

$32 \div 16 = 2$

อัตราส่วนร่วม (r) คือ 2

ตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต

1) $1,3,9,27,81, \ldots$ อัตราส่วนร่วมคือ 3

2) $10,100,1000,10000, \ldots$ อัตราส่วนร่วมคือ 10

3) $2,0.2,0.02,0.002, \ldots$ อัตราส่วนร่วมคือ 0.10

4) $3,3r,3r^2,3r^3,3r^4, \ldots$ อัตราส่วนร่วมคือ r

5) $-3,-6,-12,-24,-48, \ldots$ อัตราส่วนร่วมคือ 2

ในทำนองเดียวกัน จาก

1) $1,3,5,7,9, \ldots$

2) $3,9,27,81,243, \ldots$

3) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}, \ldots$

4) $3,3(\frac{1}{2}),3(\frac{1}{2})^2,3(\frac{1}{2})^3,3(\frac{1}{2})^4, \ldots$

5) $1,1,1,1,1, \ldots$

ข้อที่เป็นลำดับเรขาคณิต คือ

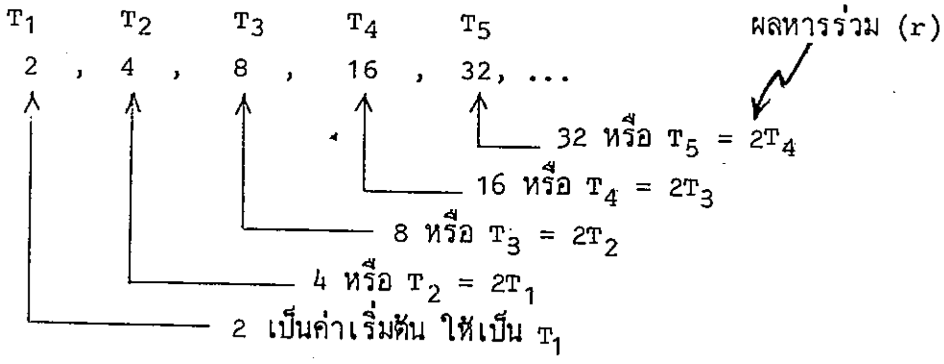
ข้อ ... ซึ่ง r = ...

ข้อ ... ซึ่ง r = ...

ข้อ ... ซึ่ง r = ... (เติม)

การหา T_n ของ G.P.

พิจารณาจากลำดับเรขาคณิต (G.P.) ที่ผ่านมา



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

$2 , 4 , 8 , 16 , 32, \ldots$

ผลหารร่วม (r)

32 หรือ $T_5 = 2T_4$

16 หรือ $T_4 = 2T_3$

8 หรือ $T_3 = 2T_2$

4 หรือ $T_2 = 2T_1$

2 เป็นค่าเริ่มต้น ให้เป็น T_1

จากความสัมพันธ์ข้างต้น จะพบว่า

ถ้าให้ ค่าเริ่มต้น = a

ผลหารร่วม = r แล้ว

จะได้ $T_1 = a$

$T_2 = rT_1 = ra$

$T_3 = rT_2 = r(ra) = r^2a$ หรือ ar^2

$T4 = rT_3 = r(r^2a) = r^3a$ หรือ ar^3

$T_5 = rT_4 = r(ra) = r^4a$ หรือ ar^4

$T_n = ar^?$

$$\therefore \boxed{T_n = ar^{n-1}}$$

ตัวอย่างที่ 7 จากลำดับเรขาคณิต 2,4,8,16,32, ...

$a = 2$

$r = 2$

$$T_n = \overset{2}{a}\overset{2}{r}^{n-1}$$

$= 2(2)^{n-1}$

$= (2)^1(2)^n(2)^{-1}$

$= 2^n$; $(2)^1(2)^{-1} = (2)^0 = 1$

$\therefore \{T_n\} = \{2^n\}$ □

ข้อสังเกตุ $\{2^n\} = 2^1,2^2,2^3,2^4,2^5, \ldots$

$= 2,4,8,16,32, \ldots$

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเรขาคณิต 3,9,27,81,243, ...

$a = 3$

$r = 3$

$$T_n = \overset{3}{a}\overset{3}{r}^{n-1}$$

$$= 3(3)^{n-1}$$

$$= 3^n$$

$$\therefore \{T_n\} = \{3^n\} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหา $\{T_n\}$ จากลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

$$a = 1$$

$$r = \frac{1}{3}$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$= 1.(\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\therefore \{T_n\} = \{\frac{1}{3^{n-1}}\} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u>

1. ถ้าลำดับเป็น $3, 3(2), 3(2)^2, 3(2)^3, \ldots$

แสดงว่า เทอมแรกคือ 3

อัตราส่วนร่วมคือ 2

$$T_n = \overset{3}{a}\overset{2}{r}^{n-1}$$

$$= 3(2)^{n-1}$$

นั่นคือ $\{T_n\} = \{3(2)^{n-1}\} \qquad \square$

2. ถ้าลำดับเป็น $2, 2(3), 2(3)^2, 2(3)^3, \ldots$ แล้วจงหา $\{T_n\}$

....

....

....

$\therefore \{T_n\} = \ldots\ldots\ldots$ (เติม)

3. จากลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$a = 1$

$r = \frac{1}{2}$

$T_n = ar^{n-1}$

$= 1.(\frac{1}{2})^{n-1}$

$= (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore \{T_n\} = \{(\frac{1}{2})^{n-1}\}$ ☐

4. จากลำดับ $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$ จงหา $\{T_n\}$

....

....

....

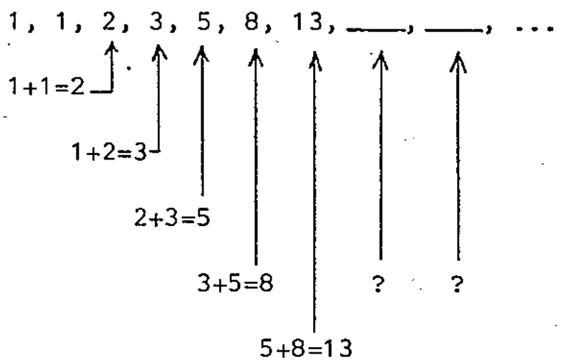
$\therefore \{T_n\} = \ldots\ldots\ldots$ (เติม)

5. ลำดับ $5, 5, 5, 5, \ldots$

$T_n = \overset{5}{a}\overset{1}{r}^{n-1}$

$= 5(1)^{n-1}$ หรือ 5

$\therefore \{T_n\} = \{5\}$ ☐



(เติม 2 ค่า)

การลู่เข้า (Convergence) และลู่ออก (Divergence) ของลำดับ

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิง ในที่นี้เราจะใช้

$$\boxed{T_\infty \text{ แทน } \lim_{n\to\infty} T_n}$$

เช่น ถ้า $T_n = 2 + \frac{1}{n}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2 + 0 = 2$$

หมายความว่า ถ้า $T_n = 2 + \frac{1}{n}$ แล้ว $T_\infty = 2$ นั่นเอง

กฎ $\{T_n\}$ เป็น convergent เมื่อ T_∞ มีค่าแน่นอน

$\{T_n\}$ เป็น divergent เมื่อ T_∞ มีค่าไม่แน่นอน

คำว่า แน่นอน หมายถึง เป็นจำนวนจริงค่าหนึ่งและค่าเดียวเท่านั้น ส่วนคำว่า ไม่แน่นอน หมายถึงมีได้หลายค่าหรือกำหนดขอบเขตไม่ได้ (∞)

ตัวอย่าง

1) ลำดับ 1, 1, 1, 1, 1, ...

เห็นชัดว่าพจน์ท้าย ๆ มีค่าแน่นอนเป็น 1 เท่านั้น หรือ $T_\infty = 1$

∴ ลำดับนี้เป็น convergent ☐

2) ลำดับ 1, −1, 1, −1, 1, ...

พจน์ท้าย ๆ มีค่าไม่แน่นอน คือเป็น 1 หรือ −1 (มีได้หลายค่า)

∴ ลำดับนี้เป็น divergent ☐

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{2+\frac{1}{n}}\right)$, เอา n หารทั้งเศษและส่วน

$= 2$, เป็นค่าแน่นอน

$\therefore \{\frac{4n}{2n+1}\}$ เป็น convergent (ลู่เข้าสู่ 2) ☐

4. ลำดับ $\frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{9}, \frac{26}{11}, \ldots, \frac{n^2+1}{2n+1}, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$, เอา n^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{1+0}{0+0}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= \infty$$

$\therefore \{\frac{n^2+1}{2n+1}\}$ เป็น divergent ☐

5. $\{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\}$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$, เข้ารูป $\frac{1}{\infty-\infty}$ ซึ่งไม่ทราบค่า

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-(n)}$; $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$= \infty$$

$\therefore$ ลำดับดังกล่าว เป็น divergent ☐

$T_3 = T_2+2 = 7$, แทนค่า $i = 2$ และ $T_2 = 5$

$T_4 = T_3+2 = 9$, แทนค่า $i = 3$ และ $T_3 = 7$

เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้

3, 5, 7, 9, 11, ... ☐

2. กำหนด $T_1 = 2$ และ $T_{i+1} = 2T_i$

$T_1 = 2$

$T_2 = 2T_1 = 2(2) = 4$

$T_3 = 2T_2 = 2(4) = 8$

$T_4 = 2T_3 = 2(8) = 16$

$T_5 = 2T_4 = 2(?) = ...$ (เติม)

∴ ลำดับที่กำหนดให้ก็คือ

2, 4, 8, 16, 32, ... ☐

3. จงเขียนลำดับเมื่อกำหนด $T_1 = a$, $T_{i+1} = rT_i$

....

....

....

....

....

.... ☐

<u>ทดสอบ</u> จาก $\{T_n\} = \{2n-1\}$

$= 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

จะได้ $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$\therefore$ $S_4 = \ldots$ (เติม)

$S_5 = \ldots$ (เติม)

<u>NOTE</u> เรานิยมใช้อักษรกรีก " Σ " อ่านว่า "Sigma" แทน "ผลบวก" เช่น

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ เขียนเป็น $\sum_{i=1}^{4} T_i$

$\therefore$ $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ ก็จะเขียนเป็น ... (เติม)

ในทำนองเดียวกัน

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$ ก็จะเขียนเป็น ... (เติม)

บางครั้งเราอ่าน " $\sum_{i=1}^{4} T_i$ " ว่า "ผลบวกของทีไอ เมื่อไอเริ่มต้นจาก 1 ถึง 4"

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{n} T_k$ ก็จะอ่านว่า ".." (เติม)

ดังนั้น จากที่ผ่านมา

ถ้ากำหนด $\{T_n\} = T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$

เราจะได้ $S_1 = T_1$

$S_2 = T_1 + T_2 = \sum_{i=1}^{2} T_i$

$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = \sum_{i=1}^{3} T_i$

$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \sum_{i=1}^{4} T_i$

$\vdots$

และ $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \ldots$ (เติม)

$$a = 1$$

$$d = 1$$

$$n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d]$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2}\,[2.1 + (10 - 1)\,.\,1]$$

$$= \frac{10}{2}\,[11]$$

$$= 55$$

☐

2. จงหาผลบวกของ 20 เทอมแรกของจำนวนเต็มบวกคู่

....

....

....

....

....

3. จงหาผลบวกของ 20 เทอมแรกของจำนวนเต็มบวกคี่

....

....

....

....

....

NOTE เราเรียก

1) ลำดับ 1, 2, 3, 4, ... ว่าเป็นลำดับอนันต์ (ไม่ทราบพจน์สุดท้าย)

2) อนุกรม 1 + 2 + 3 + 4 ... ว่าเป็นอนุกรมอนันต์ (ไม่ทราบพจน์สุดท้าย)

3) ลำดับ 1, 2, 3, 4, ..., 100 ว่าเป็นลำดับจำกัด (ทราบพจน์สุดท้าย)

4) อนุกรม 1 + 2 + 3 + 4+... + 100 ว่าเป็นอนุกรมจำกัด (ทราบพจน์สุดท้าย)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2}{3}\left(4^n - 1\right) = \frac{2}{3}(4^{\infty} - 1)$$
$$= \infty$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

และ $S_\infty = \infty$ □

2. จงหา S_n และ S_∞ จาก $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

....

....

....

....

....

การลู่เข้า (Convergence) และการลู่ออก (Divergence) ของอนุกรม

พิจารณาอนุกรมต่อไปนี้

a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

หรือ $2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + \ldots$

ซึ่ง
$$S_2 = 2 + 1 = 3$$
$$S_3 = 2 + 1 + 0.5 = 3.5$$
$$S_4 = 2 + 1 + 0.5 + 0.25 = 3.75$$
$$S_5 = 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 3.875$$

$$S_{10} = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) = 2\left[\frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 3.996093752$$

จากข้อ b)

$$2 + 8 + 32 + 128 + 512 + \dots$$

$$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{4^n - 1}{4 - 1}\right)$$ โดย $a = 2,\ r = 4$

$$= \frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

$\therefore\ S_\infty = \infty$, เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $4^n \longrightarrow \infty$

ทำให้ $\frac{2}{3}(4^n-1) \longrightarrow \infty$

2) เราเรียกอนุกรมที่ S_∞ มีค่าแน่นอน (เป็นจำนวนจริงหนึ่งค่าเท่านั้น เช่น 4 ในข้อ a) ว่าเป็น convergent หรือลู่เข้า

และเรียกอนุกรมที่ S_∞ มีค่าไม่แน่นอน (เช่น $\pm\infty$) ว่าเป็น divergent หรือลู่ออก เช่นข้อ b

3) ลำดับเลขคณิต $a,\ a+d,\ a+2d,\ \dots$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

$S_\infty = \infty$ หรือ $-\infty$ เสมอ (ถ้า a หรือ $d \neq 0$)

$\therefore$ อนุกรมเลขคณิตจึงเป็น divergent เสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1) $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

3) $1 + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots$

4) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$

5) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

3) $1+\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^3+(\frac{3}{2})^4+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $a = 1,\ r = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} S_n &= a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) \\ &= 1\left[\frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right] \\ &= 2\,[(\frac{3}{2})^n - 1] \\ &= \infty \quad \text{เมื่อ} \quad n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

$\therefore$ อนุกรมในข้อ 3) เป็น divergent ☐

<u>NOTE</u> ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้ว $(\frac{3}{2})^n = (1.5)^n \longrightarrow \infty$

ทำให้ $2\,[(\frac{3}{2})^n - 1] \rightarrow \infty$

เราสรุปได้ว่า

อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$ (ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะที่ r เป็น +)

ถ้า $o \leqslant r < 1$ แล้ว จะเป็น convergent (เช่น $r = \frac{1}{10}$, $r = \frac{1}{2}$)

ถ้า $r \geqslant 1$ แล้ว จะเป็น divergent (เช่น $r = \frac{3}{2}$)

4) $1+2+3+4+5+\ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต จึงเป็น divergent ☐

5) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ ☐

อนุกรมในข้อ 5) มีชื่อว่า harmonic

เราไม่สามารถหา S_n ได้ จึงตอบยังไม่ได้ว่าเป็น divergent หรือ convergent.

2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \frac{31}{32} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^n} + \ldots$

$$T_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1}\right)$$, เอา 2^n หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1}$$

$$= 1$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ อนุกรม (2) เป็น divergent □

3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$ สรุปไม่ได้โดยวิธีนี้

(แต่จะสรุปได้โดยวิธีอื่น ๆ ดังจะได้กล่าวต่อไป)

ให้ทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

4. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \frac{11}{5} + \ldots + \frac{2n + 1}{n} + \ldots$ (di.)

----

5. $2 + 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[5]{2} + \ldots$ (di.)

----

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{dn^3}{dn}}\right) \quad , \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{3n^2}$$, เมื่อ take limit แล้วยังเป็น $\frac{\infty}{\infty}$ อีก จึง diff. ต่อ

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{d\,3n^2}{dn}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{6n}$$, เมื่อ take limit แล้วยังเป็น $\frac{\infty}{\infty}$ อีก จึง diff. ต่อ

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{d\,6n}{dn}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{6}$$

$$= \infty$$ ☐

II <u>วิธี Integrate</u>

กล่าวว่า จาก $\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + \dots$

ถ้า $\int_k^\infty T_n\,dn$ มีค่าแน่นอนแล้ว ΣT_i เป็น convergent

ถ้ามีค่าไม่แน่นอนแล้ว ΣT_i เป็น divergent

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ตัวอย่าง จงทดสอบ

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

$$T_n = \frac{1}{n}$$

$$\int_k^\infty T_n\,dn = \int_1^\infty \left(\frac{1}{n}\right) dn \qquad \text{เลือก } k = 1$$

$$= \ln n \Big|_1^\infty$$

(4) P-series

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots \quad ; \quad P > 0$$

ซึ่ง $T_n = \frac{1}{n^p}$

เราสามารถแสดงได้ว่า (ให้นักศึกษาไปแสดงเองเช่นกัน)

$$ {}_p\int^{\infty} T_n dn = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{เมื่อ} \quad P > 1 \\ \infty & \text{เมื่อ} \quad P \leqslant 1 \end{cases} $$

นั่นคือ

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$$

a) เป็น convergent เมื่อ $P > 1$

เช่น $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$ $(P = 2)$

b) เป็น divergent เมื่อ $P \leqslant 1$

เช่น $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ $(P = 1)$

หรือ $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \ldots$ $(P = \frac{1}{2})$

เป็นต้น

III วิธีการเปรียบเทียบ (Comparison)

เราทราบว่า อนุกรมที่เป็น convergent เมื่อบวกกันแล้วจะมีค่าแน่นอน และไม่เกินค่าใดค่าหนึ่ง เช่น

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$$

ส่วนอนุกรมที่เป็น divergent เมื่อบวกกันแล้ว จะมีค่ามากมาย จนหาขอบเขตไม่ได้ หรือกำหนดค่าแน่นอนไม่ได้ เช่น

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = \infty$$

b) P-Series : $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$

— เป็น convergent เมื่อ $p > 1$ เช่น

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$ $(P = 2)$

— เป็น divergent เมื่อ $p \leqslant 1$ เช่น

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ $(P = 1)$

หรือ $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \ldots$ $(P = \frac{1}{2})$ เป็นต้น

c) ความสัมพันธ์ที่ควรจดจำ

เช่น $\ldots \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < 3 < \ldots$

จำว่า $\frac{1}{\text{เลขมาก}} < \frac{1}{\text{เลขน้อย}}$

เช่น 1) $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$

2) $\frac{1}{n} < \frac{1}{n - 2}$, เมื่อ $n > 2$ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็น con. หรือ div.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{n^2 + 1} + \ldots$

เราทราบว่า $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$

ทำให้ $\Sigma \frac{1}{n^2 + 1} < \Sigma \frac{1}{n^2}$

หรือ $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{n^2 + 1} + \ldots < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

2. $x^{a+b} = x^{a}.\ x^{b}$, $x^{a-b} = x^{a}.\ x^{-b}$

3. $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$

$$= n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)!$$

$$= \ldots$$

$$(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)!$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)(n)(n-1)!$$

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u> จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots$

พิจารณาจากอนุกรม ทราบว่า $T_n = \frac{n}{3^n}$

จะได้ $T_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \left(\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n}\right) \qquad ; \quad 3^{n+1} = 3^n.\ 3^1$$

$$= \frac{n+1}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(น้อยกว่า 1)

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น convergent $\square$

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

$$T_n = \frac{1}{n} \ , \quad T_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ ,$$ วิธีนี้สรุปไม่ได้

(แต่เมื่อเลือกวิธีการที่เหมาะสม เราจะทราบว่าอนุกรมดังกล่าวเป็น divergent)

<u>S_n ต่างกับ T_n (หรือ a_n) อย่างไร ?</u>

S_n เป็นผลบวกของ n เทอม

T_n หรือ a_n เป็นเทอมที่ n หรือเทอมทั่ว ๆ ไป

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> $\sum_{i=1}^{n} T_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

เราเขียน S_n ได้ดังนี้

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

หรือ $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

หรือ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ส่วน T_n เขียนได้แบบเดียวเท่านั้น คือ

$$T_n = n$$

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> $\sum_{i=1}^{n} T_i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right), \quad r \neq 1$

เราเขียน $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$

หรือ $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

หรือ $S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$

โดย $T_n = ar^{n-1}$

บางครั้งเราเขียนสั้น ๆ ว่า $S_n = \Sigma T_n$

ตัวอย่างที่ 14 ถ้า $T_n = S_n - S_{n-1}$ จงหา T_n จาก $S_n = \frac{n}{n+1}$

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{(n-1)+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{n}$$

$$= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2-1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \qquad \square$$

NOTE อนุกรมที่ $T_n = \frac{1}{n(n+1)}$ คือ

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

สรุป

ลำดับ คือ การเขียนตัวเลขเรียงกัน คั่นแต่ละตัวด้วย comma ดังตัวอย่าง

1. ลำดับเลขคณิต : มีผลต่างร่วม (d) เท่ากันตลอด เช่น

$2, 4, 6, 8, 10, \ldots \qquad (d = 2)$

2. ลำดับเรขาคณิต : มีอัตราส่วนร่วม (r) เท่ากันตลอด เช่น

$2, 4, 8, 16, 32, \ldots \qquad (r = 2)$

3. ลำดับฮาร์โมนิค : เป็นส่วนกลับของลำดับเลขคณิต เช่น

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ เป็นต้น

2. อนุกรม divergence

คือ อนุกรมที่บวกกันแล้วมีค่ามากมายจนกำหนดขอบเขตไม่ได้ เช่น

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = \infty$$

$$10 + 10(\frac{3}{2}) + 10(\frac{3}{2})^2 + 10(\frac{3}{2})^3 + \ldots = \infty$$ เป็นต้น

อนุกรมอะไรบ้างที่เป็น convergence หรือ divergence เสมอ ?

อนุกรมที่เป็น convergence เสมอ ได้แก่

1. อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ที่ $|r| < 1$

2. อนุกรมพี

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$ ที่ $P > 1$

อนุกรมที่เป็น divergence เสมอ ได้แก่

1. อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ที่ $|r| \geqslant 1$ และ $a \neq 0$

2. อนุกรมพี

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$ ที่ $P \leqslant 1$

3. อนุกรมเลขคณิต

$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots$ ซึ่ง $a,d \neq 0$

4. อนุกรมฮาร์โมนิก

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots$ ซึ่ง $a \neq 0$

อนุกรมอะไรเอ่ยที่เป็นทั้ง con. และ div. ? ไม่มี

การทดสอบอนุกรม

ถ้าเราทราบ S_n เราจะทดสอบได้เสมอ โดยการดูที่ $S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n$

$$\therefore \frac{T_4 - T_1}{a} = \frac{a - ar^{-3}}{a}$$

$$= \frac{a\ (1 - r^{-3})}{a}$$

$$= 1 - r^{-3}$$

$$= 1 - \frac{1}{r^3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3^3} \qquad \text{, แทนค่า } r = 3$$

$$= 1 - \frac{1}{27}$$

$$= \frac{26}{27}$$

□

4. จาก $T_n = \frac{2^{n-1}}{n}$ จะได้ $T_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)} = \frac{2^n}{n+1}$

ทำให้ $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{2^n}{n+1}}{\frac{2^{n-1}}{n}}$

$$= (\frac{2^n}{n+1})\ (\frac{n}{2^{n-1}})$$

$$= (\frac{2^n}{n+1})\ (\frac{n}{2^n . 2^{-1}})$$

$$= \frac{2n}{n+1} \qquad ; \frac{1}{2^{-1}} = 2$$

$\therefore$ ถ้า $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$ □

5. $\int_1^\infty (n^{-1} + n^{-2})\ dn = \int_1^\infty n^{-1} dn + \int_1^\infty n^{-2} dn$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{n}\ dn + \int_1^\infty n^{-2}\ dn \qquad ; \int \frac{1}{n}\ dn = \ln n + c$$

$$= (\ln n - \frac{1}{n})\ \Big|_1^\infty \qquad \int n^{-2}\ dn = \frac{n^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= -\frac{1}{n} + C$$

$$= (\ln \infty - \frac{1}{\infty}) - (\ln 1 - \frac{1}{1})$$

$= 5\ [\ 1 + (-1)\ ]$

$= 5\ [\ 0\ ]$

$= 0$ $\square$

ข้อ 2. หา T_n

2.1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

เศษ : 1 , 2 , 3 , 4 , ... ฉะนั้นพจน์ที่ n คือ n

ส่วน : 2 , 3 , 4 , 5 , ... ฉะนั้นพจน์ที่ n คือ n + 1

$\therefore$ พจน์ที่ n ของลำดับข้างต้น คือ $T_n = \frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}}$

$= \frac{n}{n+1}$ $\square$

2.2) 3 , 9 , 27 , 81 , ...

สังเกตจากลำดับ จะพบว่าเป็น G.P.

ซึ่ง $a = 3$

$r = 3$

$\therefore T_n = a\,r^{n-1}$

$= 3\,(3)^{n-1}$ $\square$

2.3) 0.3 , 0.03 , 0.003 , 0.0003 , ...

$T_1 = 0.3 = \frac{3}{10}$

$T_2 = 0.03 = \frac{3}{100}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})$

$T_3 = 0.003 = \frac{3}{1000}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^2$

$T_4 = 0.0003 = \frac{3}{10000}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^3$

$\therefore T_n = \frac{3}{10}\,(\frac{1}{10})^{n-1}$ เป็น G.P. ซึ่ง $a = \frac{3}{10} = 0.3$, $r = \frac{1}{10} = 0.1$

หรือ อาจจะคิดดังนี้

$a = 0.3$

$r = 0.1$

2. ถ้าลำดับเป็น $2, 2(3), 2(3)^2, 2(3)^3, \ldots$ แล้วจงหา $\{T_n\}$

....

....

....

$\therefore \{T_n\} = \ldots\ldots\ldots$ (เติม)

3. จากลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$a = 1$

$r = \frac{1}{2}$

$T_n = ar^{n-1}$

$= 1.(\frac{1}{2})^{n-1}$

$= (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore \{T_n\} = \{(\frac{1}{2})^{n-1}\}$ ☐

4. จากลำดับ $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$ จงหา $\{T_n\}$

....

....

....

$\therefore \{T_n\} = \ldots\ldots\ldots$ (เติม)

5. ลำดับ $5, 5, 5, 5, \ldots$

$T_n = \overset{5}{a}\overset{1}{r}^{n-1}$

$= 5(1)^{n-1}$ หรือ 5

$\therefore \{T_n\} = \{5\}$ ☐

6. ลำดับ 1, 1, 1, 1, ...

$\{T_n\} = ?$

7. ลำดับ 10, 100, 1000, 10000, ...

$\{T_n\} = ?$

ลำดับอื่น ๆ ที่น่าสนใจ

1. ลำดับฮาร์โมนิค (Harmonic Sequence)

คือส่วนกลับของลำดับเลขคณิต กล่าวคือ

ถ้า $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว

$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots, \frac{1}{a+(n-1)d}, \ldots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิค

เช่น 1.1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

$\therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ เป็นลำดับ harmonic

1.2) $1, 3, 5, 7, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

$\therefore$ ....(เติม) เป็นลำดับ harmonic

2. ลำดับของจำนวนเฉพาะ (Prime Number)

จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนที่มากกว่า 1 และถูกหารได้ลงตัวเฉพาะเลข 1 กับตัวของมันเองเท่านั้น

$\therefore$ ลำดับของจำนวนเฉพาะก็คือ

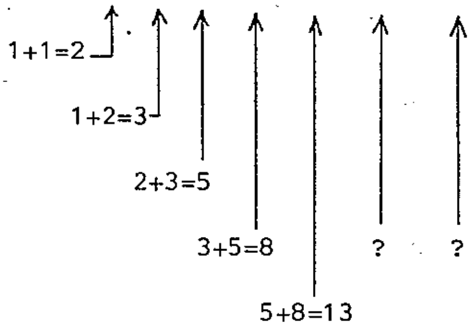
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

ค่าถัดจาก 29 คือ ....(เติม)

3. ลำดับฟิบโอแนชชี (Fibonacci)

คือ ลำดับที่สองพจน์แรกเป็น 1 และพจน์ถัด ๆ ไปเกิดจากสองพจน์ก่อนหน้านั้นรวมกันเสมอ ดังนี้

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ___, ___, ...



(เติม 2 ค่า)

การลู่เข้า (Convergence) และลู่ออก (Divergence) ของลำดับ

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิง ในที่นี้เราจะใช้

$\boxed{T_\infty \text{ แทน } \lim_{n\to\infty} T_n}$

เช่น ถ้า $T_n = 2 + \frac{1}{n}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2 + 0 = 2$$

หมายความว่า ถ้า $T_n = 2 + \frac{1}{n}$ แล้ว $T_\infty = 2$ นั่นเอง

กฎ $\{T_n\}$ เป็น convergent เมื่อ T_∞ มีค่าแน่นอน

$\{T_n\}$ เป็น divergent เมื่อ T_∞ มีค่าไม่แน่นอน

คำว่า แน่นอน หมายถึง เป็นจำนวนจริงค่าหนึ่งและค่าเดียวเท่านั้น ส่วนคำว่า ไม่แน่นอน หมายถึงมีได้หลายค่าหรือกำหนดขอบเขตไม่ได้ (∞)

ตัวอย่าง

1) ลำดับ 1, 1, 1, 1, 1, ...

เห็นชัดว่าพจน์ท้าย ๆ มีค่าแน่นอนเป็น 1 เท่านั้น หรือ $T_\infty = 1$

$\therefore$ ลำดับนี้เป็น convergent ☐

2) ลำดับ 1, −1, 1, −1, 1, ...

พจน์ท้าย ๆ มีค่าไม่แน่นอน คือเป็น 1 หรือ −1 (มีได้หลายค่า)

$\therefore$ ลำดับนี้เป็น divergent ☐

3) ลำดับ 90, 900, 9000, 90000, 900000, ...

สังเกตเห็นว่าพจน์ท้าย ๆ มีค่ามากขึ้น ๆ จนหาขอบเขตไม่ได้หรือ $T_\infty = \infty$

$\therefore$ ลำดับนี้จึงเป็น divergent (คือลู่ออก) $\square$

4) ลำดับ 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, 1.99999, ...

สังเกตเห็นว่า พจน์ท้าย ๆ มีค่ามากขึ้น ๆ เข้าใกล้ 2 เรื่อย ๆ แต่จะไม่มีทางเกิน 2 นั่นคือ $T_\infty = 2$

$\therefore$ ลำดับนี้จึงเป็น convergent (คือลู่เข้าสู่ 2) $\square$

อย่างไรก็ตาม ลำดับโดยทั่ว ๆ ไป อาจจะมองเห็นไม่ค่อยชัดว่าลู่เข้าหรือลู่ออก เช่น

$$\frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{12}{7}, \frac{16}{9}, \frac{20}{11}, \cdots$$

จึงจำเป็นต้องหา T_n ก่อน แล้วจึงทราบ T_∞ ทีหลัง

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u> ลำดับต่อไปนี้ เป็น convergent หรือ divergent.

1. ลำดับ 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n, ...

เป็น divergent (ลู่ออก)

$$\because T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n) = \infty$$ $\square$

2. ลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

เป็น convergent (ลู่เข้า)

$$\because T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0$$, 0 เป็นค่าแน่นอน $\square$

3. ลำดับ $\frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{12}{7}, \frac{16}{9}, \frac{20}{11}, \ldots, \frac{4n}{2n+1}, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{4n}{2n+1})$$

$= \lim_{n\to\infty} (\frac{4}{2+\frac{1}{n}})$, เอา n หารทั้งเศษและส่วน

$= 2$, เป็นค่าแน่นอน

$\therefore \{\frac{4n}{2n+1}\}$ เป็น convergent (ลู่เข้าสู่ 2) ☐

4\. ลำดับ $\frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{9}, \frac{26}{11}, \ldots, \frac{n^2+1}{2n+1}, \ldots$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^2+1}{2n+1})$

$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}})$, เอา n^2 หารทั้งเศษและส่วน

$= \frac{1+0}{0+0}$

$= \frac{1}{0}$

$= \infty$

$\therefore \{\frac{n^2+1}{2n+1}\}$ เป็น divergent ☐

5\. $\{\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\}$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}})$, เข้ารูป $\frac{1}{\infty-\infty}$ ซึ่งไม่ทราบค่า

$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}) \cdot (\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}})$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1)-(n)}$; $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$= \infty$

$\therefore$ ลำดับดังกล่าว เป็น divergent ☐

6. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ ลู่เข้าหรือออก ?

☐

7. $\{ n^n \}$ ลู่เข้าหรือออก ?

☐

การสร้างลำดับจากค่าเริ่มต้นบางค่า

ลำดับบางอย่างสร้างได้จากค่าเริ่มต้นบางค่า และเป็นไปตามกฎที่กำหนดไว้ เช่น ลำดับ Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

เกิดจาก $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ และ $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$

ตัวอย่างและแบบฝึกหัด จงหาลำดับเมื่อ

1. กำหนด $T_1 = 3$ และ $T_{i+1} = T_i+2$

แทนค่า $i = 1, 2, 3, \ldots$ ใน $T_{i+1} = T_i+2$

$T_1 = 3$, จากที่กำหนด

$T_2 = T_1+2 = 5$, แทนค่า $i = 1$ และ $T_1 = 3$

$T_3 = T_2+2 = 7$, แทนค่า $i = 2$ และ $T_2 = 5$

$T_4 = T_3+2 = 9$, แทนค่า $i = 3$ และ $T_3 = 7$

เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้

3, 5, 7, 9, 11, ... ☐

2. กำหนด $T_1 = 2$ และ $T_{i+1} = 2T_i$

$T_1 = 2$

$T_2 = 2T_1 = 2(2) = 4$

$T_3 = 2T_2 = 2(4) = 8$

$T_4 = 2T_3 = 2(8) = 16$

$T_5 = 2T_4 = 2(?) = ...$ (เติม)

∴ ลำดับที่กำหนดให้ก็คือ

2, 4, 8, 16, 32, ... ☐

3. จงเขียนลำดับเมื่อกำหนด $T_1 = a, T_{i+1} = rT_i$

....

....

....

....

....

.... ☐

อนุกรม

(Series)

อนุกรมคืออะไร ?

พิจารณาลำดับห้าเทอมแรกของ $\{T_n\} = \{2n - 1\}$ ซึ่งได้แก่

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ (1)

ถ้าเรานำ (1) มาเขียนให้อยู่ในรูปผลบวก เป็น

$1+3+5+7+9+\ldots$ (2)

เราเรียกการเขียนแบบ (2) ว่าเป็น อนุกรม

$\therefore$ อนุกรมก็คือ ผลบวกของลำดับนั่นเอง

หดสอบ จงบอกว่าข้อใดเป็นอนุกรม

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
3. $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
4. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$
5. $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \ldots$

คำตอบ อนุกรมคือข้อ.......... (ระบุได้หลายข้อ)

ผลบวกย่อย (Partial Sum)

จาก $\{T_n\} = T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, \ldots$

เราเขียน

$$\begin{aligned} S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_1 + T_2 \\ S_3 &= T_1 + T_2 + T_3 \\ S_4 &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &\vdots \\ S_n &= T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n \end{aligned}$$

เราเรียก S_1, S_2, S_3, S_4 หรือ S_n ว่าเป็นผลบวกย่อยของอนุกรม

<u>ทดสอบ</u> จาก $\{T_n\} = \{2n-1\}$

$= 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

จะได้ $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$\therefore$ $S_4 = \ldots$ (เติม)

$S_5 = \ldots$ (เติม)

<u>NOTE</u> เรานิยมใช้อักษรกรีก " Σ " อ่านว่า "Sigma" แทน "ผลบวก" เช่น

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ เขียนเป็น $\sum_{i=1}^{4} T_i$

$\therefore$ $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ ก็จะเขียนเป็น ... (เติม)

ในทำนองเดียวกัน

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$ ก็จะเขียนเป็น ... (เติม)

บางครั้งเราอ่าน " $\sum_{i=1}^{4} T_i$ " ว่า "ผลบวกของทีไอ เมื่อไอเริ่มต้นจาก 1 ถึง 4"

$\therefore$ $\sum_{k=1}^{n} T_k$ ก็จะอ่านว่า "......................................" (เติม)

ดังนั้น จากที่ผ่านมา

ถ้ากำหนด $\{T_n\} = T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$

เราจะได้ $S_1 = T_1$

$S_2 = T_1 + T_2 = \sum_{i=1}^{2} T_i$

$S_3 = T_1 + T_2 + T_3 = \sum_{i=1}^{3} T_i$

$S_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \sum_{i=1}^{4} T_i$

$\vdots$

และ $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \ldots$ (เติม)

อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)

จากลำดับเลขคณิต

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots,\ a+(n-1)d$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$S_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)\,d]$$

เมื่อ a = พจน์แรก

d = ผลต่างร่วม , n = จำนวนพจน์ทั้งหมด

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหา S_5 จาก $\{2n-1\} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$$a = 1$$

$$d = 2$$

$$n = 5$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore \quad S_5 = \frac{5}{2}\,[2.1+(5-1)2]$$

$$= \frac{5}{2}\,[2+8]$$

$$= \frac{5}{2}\,[10]$$

$$= 25$$

□

หรือ อาจจะบวกกันโดยไม่ต้องใช้สูตรก็ได้ กล่าวคือ

$$S_5 = 1+3+5+7+9$$

$$= 25$$

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u>

พจน์แรก

1. จงหาผลบวก 10 เทอมแรก ของ $1+2+3+4+5+\ldots$

$$a = 1$$

$$d = 1$$

$$n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2}[2.1 + (10-1).1]$$

$$= \frac{10}{2}[11]$$

$$= 55$$

☐

2. จงหาผลบวกของ 20 เทอมแรกของจำนวนเต็มบวกคู่

....

....

....

....

....

3. จงหาผลบวกของ 20 เทอมแรกของจำนวนเต็มบวกคี่

....

....

....

....

....

NOTE เราเรียก

1) ลำดับ 1, 2, 3, 4, ... ว่าเป็นลำดับอนันต์ (ไม่ทราบพจน์สุดท้าย)

2) อนุกรม 1 + 2 + 3 + 4 ... ว่าเป็นอนุกรมอนันต์ (ไม่ทราบพจน์สุดท้าย)

3) ลำดับ 1, 2, 3, 4, ..., 100 ว่าเป็นลำดับจำกัด (ทราบพจน์สุดท้าย)

4) อนุกรม 1 + 2 + 3 + 4+... + 100 ว่าเป็นอนุกรมจำกัด (ทราบพจน์สุดท้าย)

<u>อนุกรมเรขาคณิต</u> (Geometric Series)

จากลำดับเรขาคณิต $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$

เมื่อ a = พจน์แรก

r = ผลหารร่วม , n = จำนวนพจน์ทั้งหมด

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$S_n \text{ หรือ } \sum_{i=1}^{n} T_i = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) \text{ หรือ } a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

เมื่อ $r \neq 1$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหา S_3 จาก 2, 8, 32, 128, ...

ลำดับข้างต้นคือ $2, 2(4), 2(4^2), 2(4^3), \ldots$

ซึ่ง $a = 2$

$r = 4$

$$S_n = \overset{2}{a}\left(\frac{\overset{4}{r}^{\overset{3}{n}}-1}{r-1}\right)$$

$$\therefore S_3 = 2\left(\frac{4^3-1}{4-1}\right) \quad , \quad n = 3$$

$$= 2\left(\frac{63}{3}\right)$$

$$= 42$$

□

หรือ เราอาจจะบวกกันโดยตรงก็จะได้ดังนี้ (บวกกันสามเทอมแรก)

$S_3 = 2+8+32 = 42$

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u>

1. จงหา S_n และ S_∞ จาก 2, 8, 32, 128, ...

$$S_n = \overset{2}{a}\left(\frac{\overset{4}{r}^{n}-1}{r-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{4^n-1}{4-1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{3}\left(4^{n} - 1\right) = \frac{2}{3}(4^{\infty} - 1)$$

$$= \infty$$

$\therefore \quad S_n = \frac{2}{3}(4^{n} - 1)$

และ $S_\infty = \infty$ □

2. จงหา S_n และ S_∞ จาก $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

....

....

....

....

....

การลู่เข้า (Convergence) และการลู่ออก (Divergence) ของอนุกรม

พิจารณาอนุกรมต่อไปนี้

a) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

หรือ $2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + \ldots$

ซึ่ง $S_2 = 2 + 1 = 3$

$S_3 = 2 + 1 + 0.5 = 3.5$

$S_4 = 2 + 1 + 0.5 + 0.25 = 3.75$

$S_5 = 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 3.875$

$$S_{10} = a\left(\frac{1 - r^{n}}{1 - r}\right) = 2\left[\frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 3.996093752$$

จะเห็นว่ายิ่งบวก ค่าก็ยิ่งเข้าใกล้ 4 แต่จะไม่เกิน 4 เราเรียกอนุกรมเช่นนี้ว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า (ในที่นี้ลู่เข้าสู่ 4) หรือ เป็น convergent

b) $2 + 8 + 32 + 128 + 512 + \dots$

$$S_2 = 2 + 8 = 10$$

$$S_3 = 2 + 8 + 32 = 42$$

$$S_4 = 2 + 8 + 32 + 128 = 170$$

$$S_5 = 2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 682$$

$$S_{10} = a\frac{(r^n - 1)}{r - 1} = 2\frac{(4^{10} - 1)}{4 - 1} = 699{,}050$$

จะเห็นว่า ยิ่งบวกค่าก็ยิ่งมาก มากจนหาขอบเขตการสิ้นสุดไม่ได้ เราเรียกอนุกรมเช่นนี้ว่าเป็น อนุกรมที่ลู่ออก หรือเป็น divergent

<u>NOTE</u> 1) เราจะใช้ S_∞ แทนขอบเขตหรือ limit ของ S_n เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ($n \longrightarrow \infty$)

จากข้อ a) ที่ผ่านมา

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$S_n = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

$$= 2\left[\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}\right] \quad \text{โดย} \quad a = 2, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$= 4\left[1 - (\frac{1}{2})^n\right]$$

$$\therefore \quad S_\infty = 4 \qquad , \text{เมื่อ} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{แล้ว} \quad (\frac{1}{2})^n \longrightarrow 0$$

จากข้อ b)

$$2 + 8 + 32 + 128 + 512 + \ldots$$

$$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{4^n - 1}{4 - 1}\right)$$ โดย $a = 2, \quad r = 4$

$$= \frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

$\therefore \quad S_\infty = \infty$, เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $4^n \longrightarrow \infty$

ทำให้ $\frac{2}{3}(4^n-1) \longrightarrow \infty$

2) เราเรียกอนุกรมที่ S_∞ มีค่าแน่นอน (เป็นจำนวนจริงหนึ่งค่าเท่านั้น เช่น 4 ในข้อ a) ว่าเป็น convergent หรือลู่เข้า

และเรียกอนุกรมที่ S_∞ มีค่าไม่แน่นอน (เช่น $\pm \infty$) ว่าเป็น divergent หรือลู่ออก เช่นข้อ b

3) ลำดับเลขคณิต $a, a+d, a+2d, \ldots$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

$S_\infty = \infty$ หรือ $-\infty$ เสมอ (ถ้า a หรือ $d \neq 0$)

$\therefore$ อนุกรมเลขคณิตจึงเป็น divergent เสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1) $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

3) $1 + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \ldots$

4) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

5) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

1) $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $a = 10$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$= 10\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{100}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$$

$= \frac{100}{9}$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$, ($\frac{100}{9}$ เป็นค่าแน่นอน)

$\therefore$ อนุกรมในข้อ 1) เป็น convergent $\square$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $a = 1$, $r = \frac{1}{3}$

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$= 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$= \frac{3}{2}$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$

$\therefore$ อนุกรมในข้อ 2) เป็น convergent $\square$

3) $1+\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^3+(\frac{3}{2})^4+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $a = 1,\ r = \frac{3}{2}$

$$
\begin{aligned}
s_n &= a\,(\frac{r^n - 1}{r - 1}) \\
&= 1\left[\frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right] \\
&= 2\,[(\frac{3}{2})^n - 1] \\
&= \infty \qquad \text{เมื่อ} \quad n \longrightarrow \infty
\end{aligned}
$$

$\therefore$ อนุกรมในข้อ 3) เป็น divergent $\square$

<u>NOTE</u> ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้ว $(\frac{3}{2})^n = (1.5)^n \longrightarrow \infty$

ทำให้ $2\,[(\frac{3}{2})^n - 1] \rightarrow \infty$

เราสรุปได้ว่า

อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$ (ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะที่ r เป็น +)

ถ้า $o \leqslant r < 1$ แล้ว จะเป็น convergent (เช่น $r = \frac{1}{10}$, $r = \frac{1}{2}$)

ถ้า $r \geqslant 1$ แล้ว จะเป็น divergent (เช่น $r = \frac{3}{2}$)

4) $1+2+3+4+5+\ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต จึงเป็น divergent $\square$

5) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ $\square$

อนุกรมในข้อ 5) มีชื่อว่า harmonic

เราไม่สามารถหา s_n ได้ จึงตอบยังไม่ได้ว่าเป็น divergent หรือ convergent.

อย่างไรก็ตามยังมีอนุกรมจำนวนมากที่เราไม่สามารถหา s_n ได้ เช่น

a) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[5]{2} + \ldots$

b) $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{3}{2 \times 4} + \frac{4}{3 \times 5} + \frac{5}{4 \times 6} + \frac{6}{5 \times 7} + \ldots$

c) $e + \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{27} + \frac{e^4}{64} + \frac{e^5}{125} + \ldots$

d) $\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right)$ เป็นต้น

นักคณิตศาสตร์ จึงหันไปศึกษา T_n แทน s_n ในการทดสอบอนุกรมต่าง ๆ ในที่สุดก็ค้นพบหฤษฎี หรือกฎเกณฑ์ในการทดสอบอนุกรมต่าง ๆ โดยการใช้ T_n แทน s_n ในที่นี้จะนำมากล่าวถึง 4 วิธี ดังนี้

I. <u>วิธีดู T_∞</u> หรือ $\lim_{n \to \infty} T_n$

กล่าวว่า จาก $\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \ldots + T_n + \ldots$

ถ้า $\lim_{n \to \infty} T_n \neq 0$ แล้ว ΣT_i เป็น divergent

(แต่ถ้า $\lim_{n \to \infty} T_n = 0$ แล้ว เราจะสรุปอะไรไม่ได้เลย)

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u>

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} + \ldots$

จะสังเกตุเห็นว่า เศษ คือ 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...

ส่วน คือ 3, 5, 7, 9, 11,..., 2n + 1,...

∴ เทอมทั่วไป หรือ $T_n = \frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{n}}\right)$$ เอา n หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{1}{2} \neq 0$$ ∴ อนุกรม(1) เป็น divergent

2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \frac{31}{32} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^n} + \dots$

$$T_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1}\right)$$, เอา 2^n หารทั้งเศษและส่วน

$$= \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1}$$

$$= 1$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ อนุกรม(2) เป็น divergent □

3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$ สรุปไม่ได้โดยวิธีนี้

(แต่จะสรุปได้โดยวิธีอื่น ๆ ดังจะได้กล่าวต่อไป)

ให้ทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

4. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \frac{11}{5} + \dots + \frac{2n + 1}{n} + \dots$ (di.)

----

5. $2 + 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[5]{2} + \dots$ (di.)

----

6. $\frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \frac{5}{\ln 5} + \frac{6}{\ln 6} + \ldots + \frac{n+1}{\ln(n+1)} + \ldots$ (di-)

----

7. $e + \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{27} + \frac{e^4}{64} + \frac{e^5}{125} + \ldots$ (di-)

----

8. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots + \frac{n}{n^n} + \ldots$

-- (สรุปยังไม่ได้)

NOTE การใช้ L'HOSPITAL'S RULE

บางฟังค์ชั่น เมื่อ take limit แล้ว จะออกมาในรูปของ $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งไม่ทราบว่ามี limit หรือไม่ เช่น

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = \frac{\infty}{\infty}$ เป็นต้น

จำเป็นต้องใช้กฎ L' HOSPITAL ซึ่งกล่าวโดยสรุปว่า

" ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\infty}{\infty}$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$"

ตัวอย่าง

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{d(n)}{dn}}{\frac{d}{dn}(2n+1)} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

☐

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{dn^3}{dn}}\right)$, $\frac{de^x}{dx} = e^x$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{3n^2}$, เมื่อ take limit แล้วยังเป็น $\frac{\infty}{\infty}$ อีก จึง diff. ต่อ

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{d\,3n^2}{dn}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{6n}$, เมื่อ take limit แล้วยังเป็น $\frac{\infty}{\infty}$ อีก จึง diff. ต่อ

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{de^n}{dn}}{\frac{d\,6n}{dn}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{6}$

$= \infty$ $\square$

II วิธี Integrate

กล่าวว่า จาก $\Sigma T_i = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n + \ldots$

ถ้า $\int_k^\infty T_n\,dn$ มีค่าแน่นอนแล้ว ΣT_i เป็น convergent

ถ้ามีค่าไม่แน่นอนแล้ว ΣT_i เป็น divergent

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ตัวอย่าง จงทดสอบ

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

$T_n = \frac{1}{n}$

$\int_k^\infty T_n\,dn = \int_1^\infty \left(\frac{1}{n}\right) dn$ เลือก $k = 1$

$= \ln n \Big|_1^\infty$

$$= \ln\infty - \ln 1$$

$$= \infty \qquad , \quad \ln\infty = \infty \quad , \quad \ln 1 = 0$$

(กำหนดค่าแน่นอนไม่ได้)

$\therefore$ อนุกรมใน (1) เป็น divergent ☐

(2) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_k^\infty T_n\, dn = \int_1^\infty n^{-\frac{1}{2}}\, dn \quad , \text{ เลือก } k = 1$$

$$= 2n^{\frac{1}{2}}\Big|_1^\infty$$

$$= 2(\infty) - 2(1)$$

$$= \infty \quad , \text{ ไม่ทราบค่าแน่นอน}$$

$\therefore$ อนุกรมในข้อ (2) เป็น divergent ☐

(3) อนุกรม Harmonic

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)d} + \ldots$$

ซึ่ง $T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$

เราสามารถแสดงได้ว่า (ให้นักศึกษาไปแสดงเอง)

$$\int_k^\infty T_n\, dn = \infty \quad \text{เสมอ}$$

นั่นคือ อนุกรม Harmonic เป็น divergent เสมอ ☐

ตัวอย่างของอนุกรม harmonic เช่น

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$ เป็นต้น

(4) P-series

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots \qquad ; \quad P > 0$$

ซึ่ง $T_n = \frac{1}{n^p}$

เราสามารถแสดงได้ว่า (ให้นักศึกษาไปแสดงเองเช่นกัน)

$$ {}_{p}\int^{\infty} T_n \, dn = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{เมื่อ} \quad P > 1 \\ \infty & \text{เมื่อ} \quad P \leqslant 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$$

a) เป็น convergent เมื่อ $P > 1$

เช่น $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \qquad (P = 2)$

b) เป็น divergent เมื่อ $P \leqslant 1$

เช่น $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \qquad (P = 1)$

หรือ $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \dots \qquad (P = \frac{1}{2})$

เป็นต้น

III วิธีการเปรียบเทียบ (Comparison)

เราทราบว่า อนุกรมที่เป็น convergent เมื่อบวกกันแล้วจะมีค่าแน่นอน และไม่เกินค่าใดค่าหนึ่ง เช่น

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad = \quad 2$$

ส่วนอนุกรมที่เป็น divergent เมื่อบวกกันแล้ว จะมีค่ามากมาย จนหาขอบเขตไม่ได้ หรือกำหนดค่าแน่นอนไม่ได้ เช่น

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \quad = \quad \infty$$

ความจริงดังกล่าวจะมีความหมายเดียวกันกับการสรุปดังนี้

1) อนุกรมที่น้อยกว่าหรือเท่ากับอนุกรม convergent ก็ย่อมเป็น con. ด้วย

2) อนุกรมที่มากกว่าหรือเท่ากับอนุกรม divergent ก็ย่อมเป็น div. ด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> 1. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$ เป็น con. หรือ div. ?

เราเคยทราบว่า $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ มีค่ามากมาย (∞)

และเราเห็นชัดว่า (สังเกตเทอมต่อเทอม)

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$ จะต้องมีค่ามากกว่า $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

แต่อนุกรมทางขวามือรวมกันและมีค่ามากมาย คือ เป็น div. ดังนั้น อนุกรมทางซ้ายมือซึ่งมีค่ามากกว่านั้นอีก จึงต้องเป็น div. ด้วย $\square$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ เป็น con. หรือ div. ?

เราเคยทราบว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$ เป็น convergent

และเราเห็นชัดว่า (เปรียบเทียบดูเทอมต่อเทอม)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ ย่อมมีค่าน้อยกว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

แต่อนุกรมทางขวามือรวมกันแล้วมีค่าไม่เกิน 2 (ซึ่งเป็น convergent)

ทำให้อนุกรมทางซ้ายมือมีค่าน้อยกว่านั้นอีก คือมีค่าน้อยกว่า 2

$\therefore$ อนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ เป็น convergent $\square$

<u>NOTE</u> การที่เราจะทดสอบโดยวิธีการเปรียบเทียบได้อย่างคล่องแคล่วนั้น จำเป็นต้องจำอนุกรมที่เราเคยทราบมาก่อนว่าเป็น con. หรือ div. อนุกรมที่ควรจำเพื่อนำไปใช้ ได้แก่

a) Geometric Series : $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$

- เป็น convergent เมื่อ $0 \leqslant r < 1$ เช่น

$$3 + 3(\tfrac{1}{2}) + 3(\tfrac{1}{2})^2 + 3(\tfrac{1}{2})^3 + 3(\tfrac{1}{2})^4 + \ldots \qquad (r = \tfrac{1}{2})$$

- เป็น divergent เมื่อ $r \geqslant 1$ เช่น

$$2 + 2(\tfrac{3}{2}) + 2(\tfrac{3}{2})^2 + 2(\tfrac{3}{2})^3 + 2(\tfrac{3}{2})^4 + \ldots \qquad (r = \tfrac{3}{2})$$

b) P-Series : $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$

— เป็น convergent เมื่อ $p > 1$ เช่น

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ $(P = 2)$

— เป็น divergent เมื่อ $p \leqslant 1$ เช่น

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ $(P = 1)$

หรือ $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \dots$ $(P = \frac{1}{2})$ เป็นต้น

c) ความสัมพันธ์ที่ควรจดจำ

เช่น $\dots \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < 3 < \dots$

จำว่า $\frac{1}{\text{เลขมาก}} < \frac{1}{\text{เลขน้อย}}$

เช่น 1) $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$

2) $\frac{1}{n} < \frac{1}{n - 2}$, เมื่อ $n > 2$ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็น con. หรือ div.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots$

เราทราบว่า $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$

ทำให้ $\Sigma \frac{1}{n^2 + 1} < \Sigma \frac{1}{n^2}$

หรือ $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

แต่เราเคยทราบว่า อนุกรมทางขวามือเป็น convergent (เป็น P-Series ซึ่ง $P = 2$)

∴ อนุกรมที่กำลังพิจารณา (ซ้ายมือ) จึงเป็น convergent ด้วย ☐

2. $\Sigma \frac{1}{3^n + 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{28} + \frac{1}{82} + \dots$

เราทราบว่า $\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$

ทำให้ $\Sigma \frac{1}{3^n + 1} < \Sigma \frac{1}{3^n}$

แต่เราเคยทราบว่า อนุกรมทางขวามือ เป็น convergent

($\Sigma \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{3}$)

∴ อนุกรมทางซ้ายมือ จึงเป็น convergent ด้วย ☐

3. $3 + \frac{4}{4} + \frac{5}{9} + \frac{6}{16} + \frac{7}{25} + \dots + \frac{n+2}{n^2} + \dots$

เราทราบว่า $\frac{n+2}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

ทำให้ $\Sigma \frac{n+2}{n^2} > \Sigma \frac{1}{n}$

แต่เราเคยทราบว่าอนุกรมทางขวามือ เป็น divergent

∴ อนุกรมทางซ้ายมือ (ซึ่งมากกว่าทางขวามือ) จึงเป็น divergent ด้วย ☐

IV. วิธีดูอัตราส่วน (Ratio)

กล่าวว่า ถ้า $\lim_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} < 1$ แล้ว ΣT_i เป็น convergent

> 1 แล้ว ΣT_i เป็น divergent

$= 1$ แล้ว สรุปไม่ได้

ข้อควรจำ 1. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$

2. $x^{a+b} = x^a . x^b$, $x^{a-b} = x^a . x^{-b}$

3. $n! = n(n-1)(n-2)...\ 3.2.1$

$= n(n-1)!$

$= n(n-1)(n-2)!$

$= ...$

$(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)!$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)(n)(n-1)!$

<u>ตัวอย่างและแบบฝึกหัด</u> จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + ...$

พิจารณาจากอนุกรม ทราบว่า $T_n = \frac{n}{3^n}$

จะได้ $T_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \left(\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n}\right) \qquad ; \quad 3^{n+1} = 3^n . 3^1$$

$$= \frac{n+1}{3n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(น้อยกว่า 1)

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น convergent □

2. $\Sigma\frac{n!}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots$

$$T_n = \frac{n!}{3^n}$$

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \left(\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n!)}{3^n . 3}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{n+1}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{3}$$

$= \infty$, ซึ่งมากกว่า 1

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น divergent ☐

3. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \ldots$

....

....

....

....

....

$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{1}{4}\right.$ เป็นอนุกรม Con.$\left.\right)$

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

$$T_n = \frac{1}{n} \quad , \quad T_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ , วิธีนี้สรุปไม่ได้}$$

(แต่เมื่อเลือกวิธีการที่เหมาะสม เราจะทราบว่าอนุกรมดังกล่าวเป็น divergent)

<u>S_n ต่างกับ T_n (หรือ a_n) อย่างไร ?</u>

S_n เป็นผลบวกของ n เทอม

T_n หรือ a_n เป็นเทอมที่ n หรือเทอมทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 12 $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

เราเขียน S_n ได้ดังนี้

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

หรือ $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

หรือ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ส่วน T_n เขียนได้แบบเดียวเท่านั้น คือ

$$T_n = n$$

ตัวอย่างที่ 13 $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right), \quad r \neq 1$

เราเขียน $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$

หรือ $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

หรือ $S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$

โดย $T_n = ar^{n-1}$

บางครั้งเราเขียนสั้น ๆ ว่า $S_n = \Sigma T_n$

เราจะหา T_n จาก S_n ได้อย่างไร ?

จาก $\sum_{i=1}^{\infty} T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \ldots + T_n + \ldots$

$$S_1 = T_1$$

$$S_2 = T_1 + T_2$$

$$S_3 = \underbrace{\boxed{T_1 + T_2}}_{S_2} + T_3 = S_2 + T_3 \quad \text{หรือ} \quad T_3 = S_3 - S_2$$

$$S_4 = \underbrace{\boxed{T_1 + T_2 + T_3}}_{S_3} + T_4 = S_3 + T_4 \quad \text{หรือ} \quad T_4 = S_4 - S_3$$

$$S_5 = \underbrace{\boxed{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}}_{S_4} + T_5 = S_4 + T_5 \quad \text{หรือ} \quad T_5 = S_5 - S_4$$

เราสามารถสรุปได้ว่า $\boxed{T_n = S_n - S_{n-1}}$

การเขียน S_{n+1}, S_{n-1} จาก S_n

พิจารณา $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(10+1)$$

$$S_{123} = \frac{123}{2}(123+1)$$

$$= \frac{(123)}{2}[(123)+1]$$

$$S_? = \frac{(?)}{2}[(?)+1]$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{(n+1)}{2}[(n+1)+1]$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)}{2}[(n-1)+1]$$

ตัวอย่างที่ 14 ถ้า $T_n = S_n - S_{n-1}$ จงหา T_n จาก $S_n = \frac{n}{n+1}$

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{(n-1)+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{(n-1)}{n}$$

$$= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2-1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \qquad \square$$

NOTE อนุกรมที่ $T_n = \frac{1}{n(n+1)}$ คือ

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

สรุป

ลำดับ คือ การเขียนตัวเลขเรียงกัน คั่นแต่ละตัวด้วย comma ดังตัวอย่าง

1. ลำดับเลขคณิต : มีผลต่างร่วม (d) เท่ากันตลอด เช่น

   2, 4, 6, 8, 10, ... (d = 2)

2. ลำดับเรขาคณิต : มีอัตราส่วนร่วม (r) เท่ากันตลอด เช่น

   2, 4, 8, 16, 32, ... (r = 2)

3. ลำดับฮาร์โมนิค : เป็นส่วนกลับของลำดับเลขคณิต เช่น

   $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ เป็นต้น

<u>ลำดับ convergence</u>

คือ ลำดับที่ $T_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} T_n$ มีค่าแน่นอน เช่น

1. $9, 9, 9, 9, \ldots, 9, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = 9$
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = 0$
3. $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots, \frac{2n+1}{n}, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = 2$ เป็นต้น

<u>ลำดับ divergence</u>

คือ ลำดับที่ T_∞ มีค่าไม่แน่นอนหรือกำหนดขอบเขตไม่ได้ เช่น

1. $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = \infty$
2. $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = 1$ หรือ -1 (ไม่แน่นอน)
3. $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots, \frac{n+1}{2}, \ldots$ ซึ่ง $T_\infty = \infty$ เป็นต้น

<u>อนุกรม</u> คือ ผลบวกของลำดับ เช่น

อนุกรมเลขคณิต : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

อนุกรมเรขาคณิต : $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$

อนุกรมฮาร์โมนิก : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ เป็นต้น

<u>อนุกรมต่างกับลำดับอย่างไร</u> ?

ต่างกันที่อนุกรมเขียนในรูปของผลบวก

ลำดับ เขียนเป็นเทอม ๆ คั่นแต่ละเทอมด้วย comma

<u>อนุกรมแบ่งเป็น 2 ชนิด</u> คือ

1. อนุกรม convergence

คือ อนุกรมที่บวกกันแล้วมีค่าแน่นอน (หนึ่งค่าเท่านั้น) เช่น

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$$

$$10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \ldots = 20$$ เป็นต้น

2. อนุกรม divergence

คือ อนุกรมที่บวกกันแล้วมีค่ามากมายจนกำหนดขอบเขตไม่ได้ เช่น

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots \quad = \quad \infty$$

$$10 + 10(\frac{3}{2}) + 10(\frac{3}{2})^2 + 10(\frac{3}{2})^3 + \ldots \quad = \quad \infty$$ เป็นต้น

อนุกรมอะไรบ้างที่เป็น convergence หรือ divergence เสมอ ?

อนุกรมที่เป็น convergence เสมอ ได้แก่

1. อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ที่ $|r| < 1$

2. อนุกรมพี

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$ ที่ $p > 1$

อนุกรมที่เป็น divergence เสมอ ได้แก่

1. อนุกรมเรขาคณิต

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ที่ $|r| \geqslant 1$ และ $a \neq 0$

2. อนุกรมพี

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$ ที่ $p \leqslant 1$

3. อนุกรมเลขคณิต

$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots$ ซึ่ง $a,d \neq 0$

4. อนุกรมฮาร์โมนิก

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \ldots$ ซึ่ง $a \neq 0$

อนุกรมอะไรเอ่ยที่เป็นทั้ง con. และ div. ? ไม่มี

การทดสอบอนุกรม

ถ้าเราทราบ s_n เราจะทดสอบได้เสมอ โดยการดูที่ $S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n$

ถ้า S_∞ มีค่าแน่นอน อนุกรมจะเป็น convergent

ถ้า S_∞ มีค่าไม่แน่นอน อนุกรมจะเป็น divergent

ถ้าไม่ทราบ S_n เราจะใช้ T_n แทนดังนี้

1. ดู $T_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} Tn$

   ถ้าไม่เท่ากับ 0 ก็เป็น div.

   แต่ถ้าเท่ากับ 0 ก็สรุปไม่ได้

2. ดู $\int_k^\infty T_n \, dn$, เมื่อ k = จำนวนเต็มบวกใด ๆ

   ถ้ามีค่าแน่นอน ก็เป็น con.

   แต่ถ้าไม่แน่นอน ก็เป็น div.

3. โดยการเปรียบเทียบ

   อนุกรมที่แต่ละเทอมน้อยกว่าหรือเท่ากับอนุกรม con. ย่อมเป็น con. ด้วย

   อนุกรมที่แต่ละเทอมมากกว่าหรือเท่ากับอนุกรม div. ย่อมเป็น div. ด้วย

   (อย่าสับสน! น้อยกว่า div.หรือมากกว่า con. จะสรุปไม่ได้)

4. ดู $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n}$

   น้อยกว่า 1 เป็น con.

   มากกว่า 1 เป็น div.

   เท่ากับ 1 สรุปไม่ได้

<u>ลำดับ con.จะเป็นอนุกรม con.ด้วยหรือไม่</u> ?

ไม่จำเป็น เช่น

$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5}, \ldots$ เป็นลำดับ con.

แต่ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ เป็นอนุกรม div.

(แต่ถ้าลำดับเป็น div. เมื่อเป็นอนุกรมจะเป็น div.ด้วยเสมอ)

$$\therefore \frac{T_4 - T_1}{a} = \frac{a - ar^{-3}}{a}$$

$$= \frac{a\ (1 - r^{-3})}{a}$$

$$= 1 - r^{-3}$$

$$= 1 - \frac{1}{r^3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3^3} \qquad \text{, แทนค่า } r = 3$$

$$= 1 - \frac{1}{27}$$

$$= \frac{26}{27}$$

□

4. จาก $T_n = \frac{2^{n-1}}{n}$ จะได้ $T_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)} = \frac{2^n}{n+1}$

ทำให้ $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{2^n}{n+1}}{\frac{2^{n-1}}{n}}$

$$= (\frac{2^n}{n+1})\ (\frac{n}{2^{n-1}})$$

$$= (\frac{2^n}{n+1})\ (\frac{n}{2^n . 2^{-1}})$$

$$= \frac{2n}{n+1} \qquad ;\ \frac{1}{2^{-1}} = 2$$

$\therefore$ ถ้า $n \longrightarrow \infty$ แล้ว $\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$ □

5. $\int_1^{\infty} (n^{-1} + n^{-2})\ dn = \int_1^{\infty} n^{-1} dn + \int_1^{\infty} n^{-2} dn$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{n}\ dn + \int_1^{\infty} n^{-2}\ dn$$

$;\ \int \frac{1}{n}\ dn = \ln n + c$

$$= (\ln n - \frac{1}{n})\ \Big|_1^{\infty}$$

$\int n^{-2}\ dn = \frac{n^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= -\frac{1}{n} + C$

$$= (\ln \infty - \frac{1}{\infty}) - (\ln 1 - \frac{1}{1})$$

$$= (\infty - 0) - (0 - 1) \qquad ; \ln 1 = 0$$

$$= \infty + 1$$

$$= \infty \qquad \square$$

เฉลย แบบฝึกหัด

ข้อ 1.

1.1) $a_n = n\,(n-1)$

$a_1 = 1\,(1-1)$; แทนค่า $n = 1$

$= 1\,(0)$

$= 0 \qquad \square$

1.2) $b_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

$b_2 = 1 - \frac{1}{10^2}$; แทนค่า $n = 2$

$= 1 - \frac{1}{100}$

$= \frac{99}{100} \qquad \square$

1.3) $c_n = (-1)^n\,(2n-1)$

$c_3 = (-1)^3\,(2.3-1)$; แทนค่า $n = 3$

$= (-1)\,(6-1)$

$= -5 \qquad \square$

1.4) $d_n = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$

$d_4 = (-1)^4 \frac{4}{(4+1)^2}$

$= \frac{4}{25} \qquad \square$

1.5) $T_n = n\,[\,1+(-1)^n\,]$

$T_5 = 5\,[\,1+(-1)^5\,]$; แทนค่า $n = 5$

$= 5 [\ 1 + (-1)\ ]$

$= 5 [\ 0\ ]$

$= 0$ $\square$

ข้อ 2. หา T_n

2.1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

เศษ : 1 , 2 , 3 , 4 , ... ฉะนั้นพจน์ที่ n คือ n

ส่วน : 2 , 3 , 4 , 5 , ... ฉะนั้นพจน์ที่ n คือ n + 1

$\therefore$ พจน์ที่ n ของลำดับข้างต้น คือ $T_n = \frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}}$

$= \frac{n}{n+1}$ $\square$

2.2) 3 , 9 , 27 , 81 , ...

สังเกตจากลำดับ จะพบว่าเป็น G.P.

ซึ่ง $a = 3$

$r = 3$

$\therefore T_n = a\,r^{n-1}$

$= 3\,(3)^{n-1}$ $\square$

2.3) 0.3 , 0.03 , 0.003 , 0.0003 , ...

$T_1 = 0.3 = \frac{3}{10}$

$T_2 = 0.03 = \frac{3}{100}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})$

$T_3 = 0.003 = \frac{3}{1000}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^2$

$T_4 = 0.0003 = \frac{3}{10000}$ หรือ $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^3$

$\therefore T_n = \frac{3}{10}(\frac{1}{10})^{n-1}$ เป็น G.P. ซึ่ง $a = \frac{3}{10} = 0.3$, $r = \frac{1}{10} = 0.1$

หรือ อาจจะคิดดังนี้

$a = 0.3$

$r = 0.1$

$\therefore \quad T_n = a\,r^{n-1}$

$\quad\quad\quad = 0.3\,(0.1)^{n-1}$ ☐

2.4) $12 , 4 , \frac{4}{3} , \frac{4}{9} , \ldots$

ดูการเพิ่มของลำดับแล้ว จะพบว่าเป็น G.P.

ซึ่ง $a = 12$

$r = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\therefore T_n = a\,r^{n-1}$

$= 12\,(\frac{1}{3})^{n-1}$ ☐

2.5) $-\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , -\frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \ldots$

ส่วน : 2 , 3 , 4 , 5 , ... แสดงว่าพจน์ที่ n คือ n + 1

เครื่องหมายสลับกัน ซึ่งพจน์ที่ n มีเครื่องหมาย เป็น $(-1)^n$

$\therefore \; T_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ หรือ $\frac{(-1)^n}{(n+1)}$ ☐

2.6) $-8 , -2 , 4 , 10 , \ldots$

เป็นลำดับ A.P.

ซึ่ง $a = -8$

$d = -2 - (-8)$

$= -2 + 8$

$= 6$

$\therefore T_n = a + (n-1)\,d$

$= -8 + (n-1)\,6$

$= -8 + 6n - 6$

$= 6n - 14$ ☐

2.7) 7 , 9 , 11 , 13 , ...

เป็นลำดับ A.P.

ซึ่ง $a = 7$

$d = 9 - 7$

$= 2$

$\therefore T_n = \overset{7}{a} + (n-1)\,\overset{2}{d}$

$= 7 + (n-1)\,2$

$= 7 + 2n - 2$

$= 2n + 5$ $\square$

2.8) -3 , -6 , -12 , -24 , ...

เป็นลำดับ G.P.

ซึ่ง $a = -3$

$r = \frac{-6}{-3}$

$= 2$

$\therefore T_n = a\,r^{n-1}$

$= -3\,(2)^{n-1}$ $\square$

2.9) $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{7^2}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{13^2}$, ...

ถ้าไม่มองกำลังสอง ของแต่ละเทอมแล้ว จะสังเกตเห็นว่า

4 , 7 , 10 , 13 , ... เป็น A.P. ซึ่ง $a = 4$

$d = 3$

และ $T_n = a + (n-1)\,d$

$= 4 + (n-1)\,3$

$= 3n + 1$

$\therefore$ เมื่อใส่กำลังสองจะได้เทอมที่ n ของลำดับ คือ

$T_n = \frac{1}{(3n+1)^2}$ $\square$

2.10) $3 , \frac{3}{\sqrt[3]{2}} , \frac{3}{\sqrt[3]{3}} , \frac{3}{\sqrt[3]{4}} , \ldots$

จะสังเกตเห็นว่า ตัวเลขจะเปลี่ยนเฉพาะใน root เท่านั้น (คือ พจน์ที่ n เป็น n) นอกนั้น มีค่าเหมือนเดิมหมด

$\therefore T_n = \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$ ☐

2.11) $\frac{1}{1} , \frac{1}{5} , \frac{1}{9} , \frac{1}{13} , \ldots$

1 , 5 , 9 , 13 , ... เป็น A.P. ซึ่ง $a = 1$

$d = 4$

$T_n = a + (n-1)\,d$

$= 1 + (n-1)\,4$

$= 4n - 3$

∴ เทอมที่ n ของลำดับข้างต้น คือ

$T_n = \frac{1}{4n-3}$ ☐

2.12) $\frac{1}{2} , \frac{1}{3.4} , \frac{1}{4.5.6} , \frac{1}{5.6.7.8} , \ldots$

ถ้าสังเกตให้ดี จะพบว่า

$T_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$ หรือ $\frac{1!}{2!}$

$T_2 = \frac{1}{3.4} = \frac{1.2}{1.2.3.4}$ หรือ $\frac{2!}{4!}$

$T_3 = \frac{1}{4.5.6} = \frac{1.2.3}{1.2.3.4.5.6}$ หรือ $\frac{3!}{6!}$

$T_4 = \frac{1}{5.6.7.8} = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ หรือ $\frac{4!}{8!}$

เพิ่มเข้ามาเลย ๆ เพื่อให้อยู่ในรูปfactorial

$\therefore T_n = \frac{n!}{(2n)!}$ ☐

2.13) $\frac{2}{1.3^1} , \frac{3}{2.3^2} , \frac{4}{3.3^3} , \frac{5}{4.3^4} , \ldots$

เศษ : 2 , 3 , 4 , 5 , ... เป็น A.P. ซึ่งพจน์ที่ n คือ n+1

ส่วน : ตัวหน้า 1 , 2 , 3 , 4 , ... เป็น A.P.และพจน์ที่ n คือ n

ตัวหลัง 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 , ... เป็นG.P.และพจน์ที่ n คือ 3^n

$$\therefore \quad T_n = \frac{\text{เศษ}}{(\text{ตัวหน้า})(\text{ตัวหลัง})} = \frac{n+1}{n3^n} \qquad \square$$

2.14) $\frac{1}{1.2^1}$, $\frac{1}{2.2^2}$, $\frac{1}{3.2^3}$, $\frac{1}{4.2^4}$, ...

สังเกตเห็นไม่ยากว่า $T_n = \frac{1}{n2^n}$ $\square$

2.15) $\frac{2}{1.3}$, $\frac{3}{2.4}$, $\frac{4}{3.5}$, $\frac{5}{4.6}$, ...

เศษ : 2 , 3 , 4 , 5 , ... พจน์ที่ n คือ n+1

ส่วน : ตัวหน้า 1 , 2 , 3 , 4 , ... พจน์ที่ n คือ n

ตัวหลัง 3 , 4 , 5 , 6 , ... พจน์ที่ n คือ n+2

$$\therefore \quad T_n = \frac{\text{เศษ}}{(\text{ตัวหน้า})(\text{ตัวหลัง})} = \frac{n+1}{n(n+2)} \qquad \square$$

2.16) $\frac{1}{2^1}$, $\frac{2}{3^2}$, $\frac{3}{4^3}$, $\frac{4}{5^4}$, ...

เศษ : 1 , 2 , 3 , 4 , ... เป็น A.P. ซึ่งพจน์ที่ n คือ n

กำลัง : 1 , 2 , 3 , 4 , ... __________ " __________

ส่วน : 2 , 3 , 4 , 5 , ... เป็น A.P. ซึ่งพจน์ที่ n คือ n+1

$$\therefore \quad T_n = \frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}^{\text{กำลัง}}} = \frac{n}{(n+1)^n} \qquad \square$$

2.17) $\frac{1}{1^{3/2}}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^{5/2}}$, $\frac{1}{4^3}$, ... ; $1^{3/2} = 1$

เศษคงที่ คือ 1

ส่วน : 1 , 2 , 3 , 4 , ... พจน์ที่ n คือ n

กำลัง : 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , ... เป็นA.P.ซึ่ง $a = 1.5$

$d = 0.5$

$$a + (n-1)\,d \;=\; 1.5 + (n-1)(0.5)$$

$$= 0.5n + 1$$

$$\therefore\; T_n = \frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}^{\text{กำลัง}}} = \frac{1}{n^{0.5n+1}} \qquad \square$$

ข้อ 3. การทดสอบ Sequence (ดูที่ T_∞ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น)

2.1) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+0}$$

$= 1$, เป็นค่าแน่นอน

แสดงว่า $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ เป็น convergent $\square$

2.2) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} (3^n)$

$= \infty$, ไม่ทราบค่าแน่นอน

$\therefore\; 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n, \ldots$ เป็น divergent $\square$

2.3) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{10^n}\right)$

$$= \frac{3}{\infty}$$

$= 0$, เป็นค่าแน่นอน

$\therefore\; 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003, \ldots, \frac{3}{10^n}, \ldots$ เป็น convergent $\square$

2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} 36\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$= 36\left(\frac{1}{3}\right)^\infty$$

$$= 36\ (0)$$

$$= 0$$

$\therefore \quad 12\ ,\ 4\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \ldots\ ,\ 36\ (\frac{1}{3})^{n}\ ,\ \ldots$ เป็น convergent ☐

2.5) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

$= \frac{-1}{\infty+1}$ หรือ $\frac{+1}{\infty+1}$

$= 0$

$\therefore \quad -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \ldots$ เป็น convergent ☐

2.6) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} (6n-14)$

$= 6(\infty) - 14$

$= \infty$

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น divergent ☐

2.7) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+5)$

$= 2(\infty) + 5$

$= \infty$

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น divergent ☐

2.8) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3(2)^n}{2}$

$= -\frac{3(2)^{\infty}}{2}$

$= -\frac{3(\infty)}{2}$

$= -\infty$

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น divergent ☐

2.9) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$

$= \frac{1}{\infty}$

$= 0$

$\therefore \quad \frac{1}{4^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{13^2}, \ldots, \frac{1}{(3n+1)^2}, \ldots$ เป็น convergent $\square$

2.10) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$

$= \frac{3}{\infty}$

$= 0$

$\therefore \quad 3, \frac{3}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{\sqrt[3]{3}}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \frac{3}{\sqrt[3]{n}}, \ldots$ เป็น convergent $\square$

2.11) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n-3}$

$= \frac{1}{\infty}$

$= 0$

$\therefore \quad 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \ldots, \frac{1}{4n-3}, \ldots$ เป็น convergent

ตั้งแต่ข้อ 2.12 ถึง 2.17 เป็น convergent ตลอด $\square$

ข้อ 4. การทดสอบอนุกรม ในข้อ 2

2.1) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$

เปรียบเทียบ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

ทางขวามือ เป็น P-Series ซึ่ง $P = 1$ เป็น divergent

$\therefore$ อนุกรมทางซ้ายมือ จึงเป็น divergent $\square$

NOTE หรือใช้วิธีดู T_∞ ก็ได้

กล่าวคือ $T_\infty = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$ เป็น divergent

(อย่าลืมว่า $T_\infty \neq 0 \rightarrow$ อนุกรมเป็น divergent , $T_\infty = 0 \rightarrow$ การทดสอบจะ Fail)

2.2) $3 + 9 + 27 + 81 + \ldots + 3^n + \ldots$

หรือ $3 + 3(3^1) + 3(3^2) + 3(3^3) + \ldots + 3(3^{n-1}) + \ldots$

เป็น G.P. ซึ่ง $r = 3 > 1$

$\therefore$ อนุกรมดังกล่าวเป็น divergent $\square$

NOTE อย่าลืมว่าในเรื่อง G.P. $r < 1$ เป็น convergent, $r > 1$ เป็น divergent และข้อนี้ ถ้าจะทดสอบโดยการดูที่ T_∞ ก็จะเห็นชัดมาก

2.3) $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$

หรือ $\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \dots$

เป็น G.P. ซึ่ง $r = \frac{1}{10} < 1$

∴ อนุกรมดังกล่าวเป็น convergent ☐

2.4) $12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots + 12\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$

เป็น G.P. ซึ่ง $r = \frac{1}{3} < 1$

∴ อนุกรมนี้เป็น convergent ☐

2.5) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

เขียนได้อีกแบบคือ $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) + \dots$

ใช้วิธีการ integrate $\int_k^\infty \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) dn = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ เป็นค่าแน่นอน $(k=1)$

∴ อนุกรมดังกล่าวเป็น Convergent ☐

2.6) $(-8)+(-2)+4+10+\dots+(6n-14)+\dots$

เป็น A.P Series จึงเป็น divergent

(อย่าลืมว่าอนุกรม A.P. เป็น divergent เสมอ) ☐

2.7) $7 + 9 + 11 + 13 + \dots + (2n+5) + \dots$

เป็น A.P Series จึงเป็น divergent ☐

2.8) $(-3) + (-6) + (-12) + (-24) + \dots + (-3)2^{n-1} + \dots$

เป็น G.P. Series ซึ่ง $r = 2 > 1$

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็น divergent

(หรือดูที่ T_{∞} ก็ได้) ☐

2.9) $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots$

เปรียบเทียบ $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

ทางขวามือเป็น P-Series และ $P = 2$ ซึ่งเป็น con.

$\therefore$ อนุกรมทางซ้ายมือเป็น convergent ☐

(น้อยกว่า con.)

2.10) $3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{3}{\sqrt[3]{n}} + \dots$

เท่ากับ $3 + \frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{3^{1/3}} + \dots + \frac{3}{n^{1/3}} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

ทางขวามือเป็น div.

$\therefore$ ทางซ้ายมือเป็น divergent

(มากกว่า div.)

(หรือจะใช้วิธี integrate ก็ง่ายดี) ☐

2.11) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \dots$

เป็น harmonic Series จึงเป็น divergent

(ส่วนกลับของ A.P. เป็น harmonic และอนุกรม harmonic เป็น div. เสมอ) ☐

2.12) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{n!}{(2n)!} + \dots$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{n!}{(2n)!} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

น้อยกว่า con.

$\therefore$ อนุกรมทางซ้ายมือ เป็น convergent

(หรือจะใช้วิธี ratio ก็ได้) $\square$

2.13) $\frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.3^2} + \frac{4}{3.3^3} + \frac{5}{4.3^4} + \ldots + \frac{(n+1)}{n3^n} + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{[\ (n+1)+1\ ]}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(n+1)}{n3^n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{3^n}.3^1} \cdot \frac{n}{(n+1)} \cdot \cancel{3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็น convergent

(อย่าลืม! ในเรื่อง ratio ถ้า $r < 1$ เป็น con., $r > 1$ เป็น di, $r = 1$ fail) $\square$

หมายเหตุ สาเหตุที่ใช้วิธี ratio ก็เพราะว่า บางวิธีใช้ไม่ได้ เช่น

วิธี $T_{\infty} = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n3^n}\right) = 0$, ไม่ทราบคำตอบ

วิธี Integrate $\int_k^{\infty} \left(\frac{n+1}{n3^n}\right) dn$, integrate ยาก! จึงต้องใช้ วิธี ratio

2.14) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \ldots + \frac{1}{n2^n} + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \cdot n2^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.\cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{2^n}.2^1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็น convergent □

2.15) $\frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.4} + \frac{4}{3.5} + \frac{5}{4.6} + \ldots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \ldots$

$$\int_k^\infty T_n \, dn = \int_k^\infty \left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right) dn$$

$$= \int_k^\infty \left(\frac{n+1}{n^2+2n}\right) dn$$

$$= \frac{1}{2} \int_k^\infty \frac{d(n^2+2n)}{(n^2+2n)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln (n^2+2n) \Big|_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \ln \infty - \frac{1}{2} \ln (3)$$

$$= \infty - \frac{1}{2} \ln 3$$

$= \infty$, ไม่ทราบค่าแน่นอน

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็น divergent

(อย่าลืม! วิธีการ integrate ถ้ามีค่าแน่นอนก็ con., ไม่แน่นอนก็ div.) □

2.16) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^n} + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left[\frac{(n+1)}{(n+1)+1}\right]^{n+1}}{\frac{n}{(n+1)^n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{n}\right) .$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= (1)^{\infty} \cdot (0)$$

$$= 0 < 1$$

$\square$

∴ อนุกรมนี้เป็น convergent

2.17) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{5/2}} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^{0.5n+1}} + \dots$

โดยการเปรียบเทียบ จะสังเกตเห็นว่า

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{5/2}} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^{0.5n+1}} + \dots < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

ทางขวามือเป็น P-Series ซึ่ง $P > 1$ เป็น convergent

∴ อนุกรมทางซ้ายมือ จึงเป็น convergent

$\square$

ข้อ 5.

5.1) ถ้า a.b,c เป็น ลำดับเลขคณิตแล้ว ผลต่างร่วมย่อมเท่ากัน

นั่นคือ $b - a = c - b = d$

หรือ $2b = a + c$

$\therefore b = \frac{a + c}{2}$

5.2) ถ้า a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว ผลหารร่วมย่อมเท่ากัน

นั่นคือ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = r$ หรือ $b^2 = ac$

$\therefore b = \pm\sqrt{ac}$

ภาคผนวก ข.

แบบทดสอบ

มหาวิทยาลัยกรุงเทพ

ข้อสอบ Test วิชา คณ.102 : Business Mathematics

ชั้นปีที่ 1 สอบวันพุธที่ 18 กุมภาพันธ์ 2530 ภาคที่ 2/2529

<u>คำสั่ง</u> - ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ
- อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณได้
- ไม่อนุญาตให้นำโจทย์ข้อสอบออกนอกห้องสอบ
- ห้ามดึงข้อสอบออกจากกัน
- ให้ทดในตัวข้อสอบได้เลย

ชื่อ.. กรุ๊ป.............. เลขที่............

ตารางคำตอบ

ให้กา X ลงในตารางคำตอบเพียงข้อละ 1 คำตอบเท่านั้น

ข้อ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ก																				
ข																				
ค																				
ง																				
จ																				

NOTE สัญลักษณ์ที่ใช้ในข้อสอบชุดนี้

a_n หรือ T_n แทน พจน์ หรือเทอมทั่วไป

S_n แทนผลบวกย่อย n เทอม

div. และ con. แทน divergent และ convergent ตามลำดับ

$$\Sigma a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

โจทย์

1. ให้เทอมที่ 6 และ 21 ของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 28 และ 118 ตามลำดับ เทอมที่ 1 และผลต่างร่วมคือ ..... และ ..... ตามลำดับ

   ก. -2 และ 6

   ข. 3 และ 5

   ค. 8 และ 4

   ง. 13 และ 3

   จ. ไม่มีข้อใดถูก

2. จากลำดับเรขาคณิต -3, -6, -12,... เทอมที่ 6 คือ...

   ก. -96

   ข. -192

   ค. -384

   ง. -768

   จ. ไม่มีคำตอบถูก

3. ถ้า $a_1 = 3$ และ $a_{i+1} = a_i - 3$ แล้ว ข้อใดถูก

   ก. ลำดับนี้เป็น convergent

   ข. ลำดับนี้มี $a_n = 3n$

   ค. ห้าเทอมแรกคือ 3, -3, -9, -15, -21

   ง. ลำดับนี้มี $a_n = 3 + 3(1-n)$

   จ. ไม่มีคำตอบถูก

4. กำหนดลำดับ $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{5}$, ... ต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

ก. a_n หรือ $T_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$

ข. ลำดับนี้ converges เข้าสู่ 2

ค. เทอมที่ 10 คือ $\frac{21}{11}$

ง. ถูกทั้งข้อ ก, ข และ ค

จ. ไม่มีข้อใดถูก

5. ถ้า $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n^2}{2}$ แล้ว a_n (หรือ T_n) มีค่าเท่ากับ...

ก. $\frac{2n - 1}{2}$

ข. $2n - 1$

ค. $\frac{3}{2}(2n-1)$

ง. $2(2n-1)$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

6. ถ้า $a_1 = 2$ และ $a_{i + 1} = 4a_i$ แล้ว ข้อใดถูก

ก. ลำดับนี้เป็น convergent

ข. $a_n = 2(4)^{n-1}$

ค. สามเทอมแรกคือ 2, 8, 14

ง. ถูกสองข้อในข้อ ก, ข, ค

จ. ถูกทั้งข้อ ก, ข, และ ค

7. ถ้า 6, x, y, z, ..., 51 เป็นลำดับเลขคณิต และเทอมที่ 10 คือ 51 จงหาค่า x, y และ z

ก. 11, 16, 21

ข. 12, 18, 24

ค. 13, 20, 27

ง. 14, 22, 30

จ. ไม่มีคำตอบถูก

8. กำหนด 1) $a_n = \frac{3n + 6}{7}$ 2) $a_n = (8n - 4)^{-3}$ 3) $a_n = \frac{1}{2^n}$

4) $a_n = 5^{-6n}$ อยากทราบว่ามีลำดับ divergent กี่ข้อ

ก. 1 ข้อ ค. 3 ข้อ

ข. 2 ข้อ ง. 4 ข้อ จ. ไม่มีคำตอบถูก

9. กำหนดลำดับ 1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ 2) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

จงหาว่าข้อใดถูกต้อง

ก. ข้อ 1 เป็น divergent และ ข้อ 2 เป็น convergent

ข. เป็น divergent ทั้งคู่

ค. ข้อ 1 เป็น convergent และ ข้อ 2 เป็น divergent

ง. เป็น convergent ทั้งคู่

จ. ไม่มีข้อใดถูก

10. ต่อไปนี้เป็นเทอมทั่วไปของลำดับ อยากทราบว่าข้อใดเป็น convergent

ก. $(-1)^n$ ค. $\sqrt{n}$

ข. n ง. $(1.1)^n$ จ. ไม่มีข้อใดถูก

11. ข้อใดถูก ถ้า $a_n = \frac{4n^2 - n}{6n^2 + 15}$ เป็นเทอมทั่วไปของลำดับ

ก. ลำดับนี้เป็น divergent

ข. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ค. $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3}$

ง. $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$

จ. ไม่มีข้อใดถูก

12. กำหนดลำดับ 1) 1, 1, 1, 1,... 3) 1, 2, 3, 4,...

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ 4) 1, 0, 1, 0,...

แสดงว่าเป็น convergent จำนวน.......ข้อ

ก) 1 ข) 2 ค) 3 ง) 4 จ) ไม่มีข้อใดถูก

13. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง

ก. อนุกรมที่มี $s_n = \frac{n^2 + 5n - 1}{3n^2 + 4}$ เป็น divergent

ข. อนุกรมที่มี $s_n = 5n^2 + 1$ เป็น convergent

ค. อนุกรมที่มี $s_n = \frac{4n + 2}{3}$ เป็น divergent

ง. อนุกรมที่มี $s_n = \frac{5n^2 + 3}{n - 7}$ เป็น convergent

จ. ไม่มีข้อใดถูก

14. กำหนดอนุกรม 1) $0.015 + 0.00015 + 0.0000015 + \ldots + \frac{15}{10^{2n+1}} + \ldots$

2) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$ ข้อใดถูก

ก. เป็น convergent ทั้งคู่ ค. ข้อ 1 เป็น con. ข้อ 2 เป็น div.

ข. เป็น divergent ทั้งคู่ ง. ข้อ 1 เป็น div. ข้อ 2 เป็น con.

จ. ไม่มีข้อใดถูก

15. ข้อใดถูกต้องที่สุด $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ เป็น...

ก. convergent เพราะว่า $\lim_{n \to \infty} s_n$ มีค่าแน่นอน

ข. convergent เพราะว่า $\int_1^\infty \frac{1}{n} dn$ มีค่าแน่นอน

ค. divergent เพราะว่า $\int_1^\infty \frac{1}{n} dn$ มีค่าไม่แน่นอน

ง. divergent เพราะว่ามันเป็น P-Series จ. ไม่มีข้อใดถูก

16. อนุกรมในข้อใดเป็น convergent

ก. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

ข. $(-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4}) + (-\frac{1}{8}) + \ldots + (-\frac{1}{2})^n + \ldots$

ค. $\frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{n+2}{2} + \ldots$

ง. เป็นมากกว่า 1 ข้อ จ. ไม่มีข้อใดถูก

17. อนุกรมในข้อใดเป็น divergent

ก. $\Sigma(-\frac{1}{2})^n$ ค. $\Sigma\frac{1}{5^n}$

ข. $\Sigma\frac{n+2}{n+3}$ ง. $\Sigma\frac{1}{n^5}$

จ. ไม่มีคำตอบถูก

18. กำหนดอนุกรม $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \dots$ ต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

ก. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

ข. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

ค. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

ง. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$

จ. ไม่มีคำตอบถูก

19. อนุกรมในข้อ 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

2) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

มีชื่อว่าอนุกรม..... และ ..... ตามลำดับ

ก. เรขาคณิต เลขคณิต และฮาร์โมนิค

ข. เรขาคณิต เรขาคณิต และเรขาคณิต

ค. เรขาคณิต เรขาคณิต และฮาร์โมนิค

ง. ฮาร์โมนิค เรขาคณิต และเรขาคณิต

จ. ไม่มีคำตอบถูก

20. ข้อใดถูกต้อง ถ้า $\Sigma \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ เป็น convergent และ $\Sigma \frac{1}{n+2}$ เป็น divergent

ก. $\Sigma \frac{1}{(n+2)^2 (n+3)^2}$ เป็น con.

ข. $\Sigma \frac{1}{(n+1)}$ เป็น div.

ค. $\Sigma \frac{1}{(n+3)}$ เป็น con.

ง. ถูกทั้ง ก และ ข

จ. ถูกทั้ง ก, ข และ ค

ภาคผนวก ค.

คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน และคะแนนแบบทดสอบ

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 7 A		
กลุ่มเก่ง : ชาย		
นายนเรนทร์	90	19
นางมงคล	88	18
นายวิริยะ	83	16
นายสุเทพ	83	17
นายเกรียงศักดิ์	82	13
กลุ่มเก่ง : หญิง		
น.ส.เรืองศรี	93	17
น.ส.สุพรรณพร	91	18
น.ส.จันทร์เพ็ญ	88	18
น.ส.มะลิวัลย์	86	16
น.ส.ทิพย์วัลย์	85	17
กลุ่มปานกลาง : ชาย		
นายอุทัย	64	17
นายธนะกิจ	60	10
นายสุรเดช	60	14
นายชินวัตร	59	6
นายบุญเลิศ	57	16

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 7 A		
กลุ่มปานกลาง : หญิง		
น.ส.นุชจรี	65	13
น.ส.จินตนา	65	13
น.ส.บุญฉาย	64	17
น.ส.ชวนพิศ	64	10
น.ส.สมฤดี	63	13
Plan 7 B		
กลุ่มอ่อน : ชาย		
นายสมศักดิ์	50	11
นายสุรัตน์	49	13
นายสุเทพ	49	11
นายบุญทาน	48	11
นายวิโรจน์	41	10
กลุ่มอ่อน : หญิง		
น.ส.สายรุ้ง	44	11
น.ส.อรัญญา	43	11
น.ส.วราภรณ์	42	10
น.ส.แสงหล้า	42	4
น.ส.ธิดารัตน์	41	6

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 7 C		
กลุ่มเก่ง : ชาย		
นายกอบศักดิ์	92	19
นายไพรินทร์	92	17
นายครุณ	89	17
นายราเชนทร์	88	19
นายมนัส	85	18
กลุ่มเก่ง : หญิง		
น.ส.ภาวนา	92	20
น.ส.กนกวรรณ	90	17
น.ส.สุภาพร	85	15
น.ส.วันดี	85	17
น.ส.สุภร	84	18
กลุ่มปานกลาง : ชาย		
นายประพันธ์	64	9
นายวิศิษฐ์	62	16
นายมีศักดิ์	61	12
นายประทีป	60	9
นายสุรชัย	59	10

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ชั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 7 C		
กลุ่มปานกลาง : หญิง		
น.ส.กิติวรี	64	12
น.ส.ทิพวัลย์	63	14
น.ส.ศิริลักษณ์	63	11
น.ส.นุชจรินทร์	63	17
น.ส.สุพัตรา	63	12
Plan 7 D		
กลุ่มอ่อน : ชาย		
นายสุธรรม	51	16
นายปรัชญา	50	12
นายเพชรสุวรรณ	49	10
นายนิรัตน์	43	10
นายพงษ์ศักดิ์	39	8
กลุ่มอ่อน : หญิง		
น.ส.สินีนาฎ	46	13
น.ส.รักขนก	45	12
น.ส.เจิดนภา	44	6
น.ส.สุจิตตรา	40	4
น.ส.การเกต	38	9

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ ขั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 10 A		
กลุ่มเก่ง : ชาย		
นายศุภศักดิ์	91	17
นายสุทธิชัย	90	20
นายวีระเกียรติ	88	19
นายทินกร	87	17
นายพรสวัสดิ์	83	13
กลุ่มเก่ง : หญิง		
น.ส.ปัทมา	93	17
น.ส.กัลยกมล	90	15
น.ส.อภิรดี	86	13
น.ส.อัมพร	85	18
น.ส.พรเพ็ญ	83	18
กลุ่มปานกลาง : ชาย		
นายนิวัฒน์	65	17
นายศักดิ์ชัย	62	8
นายบัญชา	59	7
นายธนัญชัย	57	14
นายสมศักดิ์	55	9

กลุ่ม	คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (เต็ม 100)	แบบทดสอบ (เต็ม 20)
Plan 10 A		
กลุ่มปานกลาง : หญิง		
น.ส.จารุณี	64	11
น.ส.ประการัตน์	64	13
น.ส.ศิริวรรณ	62	8
น.ส.สุชาดา	63	11
น.ส.เพียงพร	62	4
Plan 10 B		
กลุ่มอ่อน : ชาย		
นายอนันต์	54	11
นายเกษม	52	13
นายเฉลิมชัย	52	9
นายประสงค์	47	17
นายสุนทร	40	7
กลุ่มอ่อน : หญิง		
น.ส.กุลยา	45	9
น.ส.รสรา	45	16
น.ส.กานดา	43	10
น.ส.เนาวรัตน์	39	8
น.ส.สุปราณี	38	9

ภาคผนวก ง.

ผลการวิเคราะห์หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

ตารางที่ 8 สรุปการหาค่า r_{tt} ของแบบทดสอบที่สอบหลังจากสอนจบ 2 – 3 วัน
(จำนวนข้อสอบ 20 ข้อ และจำนวนผู้ตอบ 105 คน)

	ข้อ																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
จำนวนผู้ตอบถูก	84	97	68	96	75	63	101	44	53	20	93	45	67	75	41	46	41	88	93	58
P	0.80	0.93	0.65	0.91	0.71	0.60	0.96	0.42	0.50	0.19	0.88	0.43	0.64	0.71	0.39	0.44	0.39	0.84	0.88	0.55
q	0.20	0.07	0.35	0.09	0.29	0.40	0.04	0.58	0.50	0.81	0.12	0.57	0.36	0.29	0.61	0.56	0.61	0.16	0.12	0.45
Pq	.16	.07	.23	.08	.21	.24	.04	.24	.25	.15	.11	.24	.23	.21	.24	.25	.24	.13	.11	.25

$$\sigma^2_{n-1} = 11.56$$

$$\Sigma Pq = 3.52$$

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1-\Sigma Pq}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{20}{20-1}\left[\frac{1-3.52}{11.56}\right]$$

$$= 0.73$$

$$\overline{P} = 0.63$$

$$\overline{r} = 0.40$$